

روابط در ریاضیات

با قرار گرفتن یکی از علامات $<, =, >$ در بین دو افاده یک رابطه تشکیل می شود. این سه نوع رابطه را در ریاضیات روابط سه گانه می گویند.

1 - مساوات : در صورتی که بین دو افاده سمبول $(=)$ قرار گیرد رابطه حاصله را مساوات گویند.

انواع مساوات

1 (مطابقت : اگر دوطرف یک مساوات به عوض تمام قیمت های مجهول بر قرار بماند این نوع مساوات را مطابقت گویند.

مثال : رابطه $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ یک مطابقت است زیرا اگر در دو طرف مساوات به عوض a و b مقادیر برابر وضع نمائیم مساوات بر قرار می ماند.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix} \Rightarrow (1+2)^2 = (1)^2 + 2(2)(1) + (2)^2 \Rightarrow 9 = 1 + 4 + 4 \Rightarrow 9 = 9$$

2 (معادله : اگر در یک مساوات تنها یک و یا چند قیمت محدود صدق کند این نوع مساوات را معادله گویند و یا معادله را مساوات شرطیه گویند و به اعدادی که در معادله صدق می کنند شروط معادله و یا جذور معادله می گویند.

مثال : رابطه $x^2 + 4x = 21$ یک معادله است زیرا در این مساوات تنها اعداد 3 و 7- صدق می کند به این دو عدد شروط معادله و یا جذور معادله می گویند.

مجهول در معادله

مجهول در معادله حرف و یا حروفی هستند که هدف از حل معادله نیز در یافت قیمت عددی آنها می باشند.

تقسیم بندی معادله

1 - معادله نظر به مجهول :

نظر به تعداد حروف به کار رفته در معادله ، معادله را میتوان یک مجهوله ، دو مجهوله و غیره نامید.

(1 $2x+3=-3x$ یک معادله یک مجهوله است.

(2 $2x+3y=8x-3$ یک معادله دو مجهوله است.

(3 $3x-4y+4z=7$ یک معادله سه مجهوله است.

2 - معادله نظر به درجه :

به بزرگترین توان مجهول در معادله درجه کلی آن معادله گویند.

1 ($2x + 3y = 4$ یک معادله درجه 1 است.

2 ($2x^2 + 5x + 7 = 0$ یک معادله درجه 2 است.

3 ($ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + d = 0$ یک معادله درجه n است.

نکته : تعداد جذور یک معادله معمولاً با درجه آن معادله برابر است به طور مثال در زمان حل یک معادله درجه

2 باید انتظار دریافت دو جذر را داشته باشیم.

نکته : برای دریافت جذور مشخص یک معادله به تعداد مجهول های به کار رفته در معادله نیاز به معادله است

به طور مثال برای دریافت جذور مشخص یک معادله سه مجهوله نیاز به یک سیستم با سه معادله از جنس

همان مجهولات می باشد.

معادلات پارامتریک

معادلاتی را گویند که علاوه بر مجهول اصلی $(x, y, z, \dots)$ دارای یک و یا چند مجهول فرعی $(m, n, p, k, \dots)$

باشد هدف از معادلات پارامتریک دریافت قیمت های مجهول فرعی است به این مجهولات فرعی پارامتر های

معادله پارامتریک می گویند.

نکته : برای حل هر نوع معادله ابتدا آنرا به شکل ساده (خطی) تبدیل نموده پس از آن قیمت مجهول را

دریافت می کنیم به طور مثال برای حل معادلات قیمت مطلقه ، کسری ، جذری ، لوگاریتمی و غیره ابتدا آنها را

از این حالات خارج نموده پس از آن قیمت مجهول را دریافت می نمائیم.

خواص معادله

1 (به دو طرف معادله یک مقدار ثابت را علاوه نموده میتوانیم.

$$2x + 2 = 3y \quad \Rightarrow \quad 2x + 5 = 3y + 3$$

2 (اطراف یک معادله را میتوانیم به یک مقدار ثابت خلاف صفر ضرب و یا تقسیم نمائیم.

$$-2x + 1 = 6y + 5 \quad \Rightarrow \quad 2(-2x + 1) = 2(6y + 5)$$

3 (در صورتی که دو طرف معادله را تبدیل نمائیم در اصلیت معادله تغییری ایجاد نمی شود.

$$3m + 4x = 35x - 7 \quad \Rightarrow \quad 35x - 7 = 3m + 4x$$

4 (در صورتی که یک حد را با تغییر علامت به طرف دیگر معادله انتقال دهیم در اصلیت معادله تغییری ایجاد

نمی شود.

$$2x + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x = 5 - 3 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

5 (در یک معادله دو طرف را میتوانیم به توان یک عدد ثابت بالا ببریم و یا از دو طرف معادله با یک درجه ثابت

جذر بگیریم.

$$x^{\frac{3}{5}} = 7 \Rightarrow (x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = (7)^{\frac{5}{3}} \Rightarrow x^{\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3}} = 7^{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{7^5}$$

6) اگر در دو معادله یک طرفشان با یکدیگر برابر باشد گفته میتوانیم طرف دیگر نیز با یکدیگر برابر است.

$$\begin{cases} y + 3x = 11 \\ 2y - 8x = -20 \end{cases} \Rightarrow x = ?$$

$$\begin{cases} y = 11 - 3x \\ 2y = -20 + 8x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 11 - 3x \\ y = \frac{-20 + 8x}{2} \end{cases} \Rightarrow 11 - 3x = \frac{-20 + 8x}{2} \Rightarrow 22 - 6x = -20 + 8x$$

$$-14x = -42 \Rightarrow x = 3$$

7) اطراف دو یا چند معادله را میتوانیم طرف به طرف همراه یکدیگر جمع، تفریق، تقسیم و ضرب نمائیم.

نکته: در زمان تطبیق خاصیت هفتم خاصیت های دیگر را طوری تطبیق می نمائیم که پس از جمع، تفریق، تقسیم، ضرب معادلات خواسته سوال برآورده شود.

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ c - d = 4 \\ a + c = 10 \end{cases} \quad \text{مثال: در سیستم حاصل } (a + b + c + d) \text{ کدام است؟}$$

حل: ابتدا اطراف سه معادله را طرف به طرف با یکدیگر جمع مینمائیم سپس با استفاده از روش گروپ بندی قیمت خواسته شده دریافت میشود.

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ c - d = 4 \\ a + c = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2a + 2c - (d + b) = 16 \\ 2(a + c) - (b + d) = 16 \end{matrix}$$

$$2(10) - (b + d) = 16 \Rightarrow (b + d) = 4$$

$$a + b + c + d = (a + c) + (b + d) = 10 + 4 = 14$$

$$\begin{cases} a + b = 14 \\ b + c = 12 \\ a + c = 16 \end{cases} \quad \text{مثال: در سیستم قیمت } (2a + b - c) \text{ را دریافت نمائید؟}$$

حل: ابتدا اطراف سیستم را طرف به طرف با یکدیگر جمع نموده و وضع قیمت های $(a + b)$ ، $(b + c)$ و $(a + c)$ به ترتیب قیمت های c ، b ، a حاصل می شود.

$$\begin{cases} a + b = 14 \\ b + c = 12 \\ a + c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a + b + c = 21 \\ a + b = 14 \\ 14 + c = 21 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a + 2b + 2c = 42 \\ c = 7, \quad a = 9, \quad b = 5 \end{matrix} \Rightarrow 2a + b - c = 2(9) + 5 - 7 = 16$$

مثال : در سیستم
$$\begin{cases} \frac{xz}{y} = 4 \\ \frac{xy}{z} = 3 \\ \frac{yz}{x} = 2 \end{cases}$$
 قیمت $(x^4 - y^4 + z^2)$ را دریافت نمائید؟

حل : ابتدا اطراف سه معادله را طرف به طرف با یکدیگر ضرب نموده قیمت xyz حاصل می شود. با وضع نمودن قیمت های xz , yz , xy مقدار x , y , z حاصل می شود.

$$\begin{cases} \frac{xz}{y} = 4 \\ \frac{xy}{z} = 3 \\ \frac{yz}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 y^2 z^2}{xyz} = 24 \Rightarrow xyz = 24 \Rightarrow \frac{xy}{z} = 3 \Rightarrow xy = 3z$$

$$3z^2 = 24 \Rightarrow 3z.z = 24 \Rightarrow xyz = 24 \Rightarrow z = \sqrt{8} \quad , \quad x = \sqrt{12} \quad y = \sqrt{6} \quad ,$$

$$x^4 - y^4 + z^2 = (\sqrt{12})^4 - (\sqrt{6})^4 + (\sqrt{8})^2 = 144 - 36 + 8 = 116$$

معادلات یک مجهوله درجه یک

شکل عمومی معادله یک مجهوله درجه یک به صورت $ax + b = 0$ بوده طوریکه $a, b \in IR$ و نیز $a \neq 0$ است.

مثال :

$$2x + 3 = 7 \Rightarrow 2x + 3 - 7 = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad , \quad b = -4$$

حل معادلات یک مجهوله درجه یک

برای حل این نوع معادلات حدود مجهول را با تغییر علامت به سمت چپ و اعداد ثابت را با تغییر علامت به سمت راست انتقال می دهیم. این عملیه را معلوم مجهول نمودن گویند. پس از ساده سازی اطراف معادله را بر ضریب مجهول تقسیم نموده قیمت مجهول حاصل می شود.

مثال :

$$2(x + 5) = 49 + 5(x - 3) \Rightarrow x = ?$$

$$2x + 10 = 49 + 5x - 15 \Rightarrow 2x - 5x = 49 - 15 - 10 \Rightarrow -3x = 24 \Rightarrow x = -8$$

نکته : برای حل معادله یک مجهوله درجه یک ابتدا آنرا به شکل $ax + b = 0$ تبدیل نموده قیمت x را از

رابطه $x = -\frac{b}{a}$ حاصل می نمائیم.

مثال: قیمت x را در معادله $3x+4=7x-2$ دریافت نمائید.

$$3x+4=7x-2 \Rightarrow 3x-7x+4+2=0 \Rightarrow -4x+6=0 \Rightarrow a=-4, b=6$$

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{(6)}{(-4)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

نکته: اگر در یک معادله درجه یک قیمت $a=0$ و $b \neq 0$ شود معادله دارای حل نمی باشد و ست حل آن

خالی است و در صورتیکه $a=0$ و $b=0$ شود در این حالت ست حل معادله بی نهایت است یعنی حل آن اعداد حقیقی (IR) است.

مثال:

$$3(x-1) = (x-3) + 2x \Rightarrow x = ?$$

$$3x-3 = x-3+2x \Rightarrow 3x-3x = -3+3 \Rightarrow 0.x = 0$$

این معادله دارای بی نهایت حل است زیرا ($a=b=0$) است و ست حل آن را به (IR) نمایش می دهیم.

مثال:

$$2(3x+1) = 6x-7 \Rightarrow x = ?$$

$$2(3x+1) = 6x-7 \Rightarrow 6x+2 = 6x-7 \Rightarrow 6x-6x = -7-2 \Rightarrow 0.x = -9$$

معادله دارای حل نمی باشد زیرا ($a=0, b \neq 0$) در این حالت ست حل معادله ست ($\emptyset$) خالی است.

حل معادلات کسری درجه یک

برای حل معادلات کسری ابتدا آنرا از حالت کسری خارج نموده قیمت مجهول را دریافت می نمائیم (روش اول): جهت خارج نمودن معادله از حالت کسری عملیه های ریاضی را طوری تطبیق می نمائیم تا یک تناسب تشکیل شود پس از طرفین وسطین نمودن معادله از حالت کسری خارج شده قیمت مجهول را حاصل می نمائیم.

مثال:

$$\frac{3}{\frac{x}{2}+1} - \frac{4}{\frac{x}{2}-1} = 0 \Rightarrow x = ?$$

$$3\left(\frac{x}{2}-1\right) = 4\left(\frac{x}{2}+1\right) \Rightarrow \frac{3x}{2}-3 = 2x+4 \Rightarrow \frac{3x}{2}-2x = 4+3$$

$$\frac{3}{\frac{x}{2}+1} = \frac{4}{\frac{x}{2}-1} \Rightarrow$$

$$-\frac{x}{2} = 7 \Rightarrow x = -14$$

مثال:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}+1}+1=\frac{3x+1}{3} \Rightarrow x=?$$

$$\frac{2x}{3}+1=\frac{3x+1}{3} \Rightarrow \frac{x}{\frac{3}{2}}+1=\frac{3x+1}{3} \Rightarrow 3x+1=2x+3 \frac{2x+3}{3}=\frac{3x+1}{3} \Rightarrow$$

$$x=2$$

روش دوم: در این حالت اطراف معادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها ضرب می نمائیم با این عمل معادله از حالت کسری خارج شده پس از آن قیمت مجهول را حاصل می نمائیم.
مثال :

$$\frac{x+5}{x-4}-\frac{x+3}{x-2}=0 \Rightarrow x=?$$

$$\frac{x+5}{x-4}=\frac{x+3}{x-2} \Rightarrow (x-2)(x-4)\frac{x+5}{x-4}=\frac{x+3}{x-2}(x-2)(x-4) \Rightarrow x^2+3x-10=x^2-x-12$$

$$4x=-2 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

نکته : در حل معادلات کسری عددی که مخرج کسر را صفر بسازد جذر معادله بوده نمیتواند.
مثال :

$$x+\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=1 \Rightarrow x=?$$

$$x+\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=1 \Rightarrow x+\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}}=1 \Rightarrow x+\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}=1 \Rightarrow x+\frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}}=1$$

$$x+\frac{1}{-\frac{1}{x-1}}=1 \Rightarrow x-x+1=1 \Rightarrow x-x=1-1 \Rightarrow 0.x=0$$

ست حل این معادله تمام اعداد حقیقی است به غیر از اعداد $\{1,0\}$ زیرا این اعداد مخرج کسر را صفر میسازد.

$$x=IR-\{0,1\}$$

$$1) \frac{6}{x-1}-\frac{3}{x}-\frac{9}{2}=0$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x} - \frac{9}{2} = 0$$

$$(2x) \quad 2(x-1) \quad x(x-1)$$

$$\frac{12x - 6x + 6 - 9x^2 + 9x}{2x(x-1)} = 0 \Rightarrow -9x^2 + 15x + 6 = 0 \Rightarrow -3(3x^2 - 5x - 2) = 0$$

$$3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}, \quad x = 2 \Rightarrow S = \left\{ -\frac{1}{3}, 2 \right\}$$

$$2) \quad \frac{5x+6}{(x-2)(x+2)} + \frac{3x+5}{x+2} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{5x+6}{(x-2)(x+2)} + \frac{3x+5}{x+2} = \frac{x}{x-2}$$

$$(1) \quad (x-2) \quad (x+2) \quad (x+2)$$

$$5x+6+3x^2+5x-6x-10-x^2-2x=0$$

$$2x^2+2x-4=0 \Rightarrow 2(x^2+x-2)=0 \Rightarrow 2(x+2)(x-1)=0$$

$$x = -2, \quad x = 1$$

از آنجایی که در این معادله اگر قیمت x را -2 را قرار دهیم مخرج برابر به صفر می‌گردد پس از ست حل خارج می‌گردد پس داریم که :

$$S = \{1\}$$

$$3) \quad \frac{x+3}{x^2+x-6} - \frac{4}{x^2+4x+3} = \frac{3x+1}{3x^2-3x-6}$$

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+3)} - \frac{4}{(x+3)(x+1)} = \frac{3x+1}{3(x-2)(x+1)}$$

$$3(x+1) \quad 3(x-2) \quad (x+3)$$

$$3(x^2+4x+3)-12(x-2)=3x^2+9x+x+3$$

$$3x^2+12x+9-12x+24=3x^2+10x+3 \Rightarrow 10x=30 \Rightarrow x=3$$

نکات قابل تطبیق در معادلات

1) در صورتی که یک معادله شکل $f(x).g(x).l(x)...=0$ را داشته باشد برای حل این معادلات هر یک از این افاده‌های در حال ضرب را برابر صفر قرار داده جذر معادله را حاصل می‌نمائیم.

مثال : جذور معادله $(3x-1)(x-2)(x+2)=0$ را دریافت نمائید.

$$(3x-1)(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3}, \quad x-2=0 \Rightarrow x_2=2$$

$$x+2=0 \Rightarrow x_3=-2$$

مثال : جذور معادله $t^2 + t - 2 = 0$ را دریافت نمائید.

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1) = 0 \Rightarrow t+2=0 \Rightarrow t_1 = -2$$

$$t-1=0 \Rightarrow t_2 = 1$$

2) اگر در یک معادله چندین افاده قیمت مطلقه به حالت جمع قرار داشته باشند و حاصل جمع کلی آنها برابر به صفر باشد جهت حل این نوع معادلات داخل هر یک از قیمت مطلقه را برابر صفر قرار داده جذور معادله حاصل می شود.

مثال : در معادله $|x-2| + |2y+x| = 0$ مقدار $(x+y)$ را دریافت نمائید.

$$|x-2| + |2y+x| = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2, \quad 2y+x=0 \Rightarrow 2y+2=0$$

$$2y=-2 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x+y=(2)+(-1)=1$$

سوالات معادلات درجه اول

1. در معادله $\frac{4}{3 - \frac{2}{1 + \frac{1}{x-1}}} = 2$ قیمت X را بدست آورید؟

- (A) -2 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

2. در سیستم معادلات مقابل قیمت X/y را حاصل نمایید؟

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=17 \\ y+z=2 \end{cases}$$

- (A) -2 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

3. در سیستم معادلات $\begin{cases} x+3y+3z=13 \\ 3x+y+z=7 \end{cases}$ قیمت $x+y+z$ برابر با کدام گزینه است؟

- (A) -5 (B) $\frac{1}{5}$ (C) 5 (D) $-\frac{1}{5}$

4. در معادله $\frac{3}{2-x} - \frac{2}{x-2} = \frac{3-x}{2x-10}$ قیمت X را دریافت نمایید؟

- (A) $\{-7, 8\}$ (B) $\{7, -8\}$ (C) $\{-7, -8\}$ (D) $\{7, 8\}$

5. در معادله $5x-3(x-1)=-2(2x+4)-7$ قیمت X چند است؟

- (A) -3 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 3 (D) $-\frac{1}{3}$

6. در معادله $1 - \frac{1 - \frac{x}{2}}{2} = 1$ قیمت X را بیابید؟

- (A) $\{2\}$ (B) $\{-2\}$ (C) $\{-3\}$ (D) $\{0\}$

7. در معادله $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{3x-8}{(x-3)(x-1)}$ مقدار X چند است؟

- (A) -4 (B) 4 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{4}$

8. در معادله $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 12 - \frac{x}{5}$ قیمت مجهول X چند است؟

- (A) 36 (B) 32 (C) -36 (D) 6

9. در معادله $3x+2(5-2x)+9=12x-(3-5x)+4x$ قیمت مجهول را بیابید؟

- (A) -1 (B) 2 (C) -5 (D) 1

10. در معادله $x + \frac{3x-5}{2} = 8 - \frac{2x-16}{3}$ قیمت X را در یافت نمایید؟

- (A) -5 (B) 6 (C) 5 (D) 1

11. قیمت X را از معادله $0.37x - 0.117 - 0.283 = 0.33x$ بیابید؟

- (A) 10 (B) -10 (C) 0.1 (D) 0.5

12. حاصل معادله $x + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 1$ چند است؟

(A) $R - \{0, -1\}$ (B) $R - \{1, 0\}$ (C) $R - \{1, -1\}$ (D) $R - \{-2, 1\}$

13. مقدار $x+y$ را از معادله $(4x+10)^2 + (2y-12)^2 = 0$ دریافت کنید؟

(A) $7/2$ (B) $2/7$ (C) $-7/2$ (D) $-2/7$

14. حل معادله $\frac{x+1}{2} - \frac{x-3}{3} = \frac{11}{6}$ چیست؟

(A) -2 (B) 1 (C) 2 (D) -1

15. در معادله $\frac{x}{x+3} - \frac{1}{1 + \frac{2}{x+1}} = -\frac{1}{5}$ مقدار x را دریافت کنید؟

(A) $-1/2$ (B) 2 (C) 1 (D) -1

16. معادله $\frac{2-5x}{3} = 4-2x$ را حل نمائید؟

(A) 10 (B) 13 (C) 15 (D) 12

17. قیمت $x+y$ را از معادله $(2x-y-6)^2 + (3x+6y-34)^2 = 0$ حاصل نمایید؟

(A) 3 (B) 8 (C) 4 (D) $24/5$

18. از سیستم معادلات $\begin{cases} 2a-3b=42 \\ 3b+c=18 \\ c-3d=6 \end{cases}$ مقدار $2a-6b-2c+3d$ را بیابید؟

(A) 18 (B) -12 (C) -18 (D) 12

19. از معادله $\frac{1}{x-a+2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-5} = \frac{13}{36}$ قیمت a در صورتی بیابید که $x_1=7$ باشد.

(A) 10 (B) 13 (C) 11 (D) 12

20. قیمت x را از معادله مقابل بیابید؟ $\frac{2}{x} - \frac{x}{x+2} + \frac{x-2}{x} = \frac{6}{5}$

(A) $\{-1\}$ (B) $\{1, 0\}$ (C) $\{1/2\}$ (D) $\{-1/3\}$

21. در سیستم معادلات $\begin{cases} 3x+2y+5z=18 \\ 4x+3y+6z=28 \end{cases}$ قیمت $x+y+z$ چند است؟

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

22. حاصل $a+b+d$ را از سیستم معادلات $\begin{cases} a+b+c=8 \\ b+c+d=7 \\ c+d+a=11 \end{cases}$ در یابید؟

(A) $13-c$ (B) $26-3c$ (C) $13-\frac{3c}{2}$ (D) $11-\frac{3c}{2}$

23. قیمت a را از معادله $\frac{a - \frac{1}{a}}{2 - \frac{2}{a}} = \frac{2a - 4}{4}$ در یابید؟

(A) $\{-1\}$ (B) $\{-2\}$ (C) $\{-4\}$ (D) هیچکدام

24. از معادله $\frac{a+2}{a-1} - \frac{2-a}{1-a} = 1$ قیمت a را بدست آورید؟

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 1

25. جذر معادله $\frac{3x+2}{4} - \frac{4x-3}{4} = 2$ چند است؟

(A) 3 (B) $1/3$ (C) -3 (D) 2

26. قیمت x را از معادله $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{4} = 2x - \frac{x-1}{4}$ بدست آورید؟

(A) $-1/2$ (B) $1/3$ (C) $1/2$ (D) $-1/3$

27. حل معادله $\frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}} = 2$ چیست؟

(A) 0 (B) 1 (C) $1/2$ (D) $-1/2$

28. از معادله $0.2x + 3 = x + \frac{1}{3}$ قیمت را بدست آورید؟

(A) $21/6$ (B) $8/7$ (C) $10/3$ (D) $20/7$

29. در معادله $\frac{2x-1}{3} + \frac{x+1}{2} = x$ قیمت x را دریافت کنید؟

(A) 4 (B) 3 (C) -1 (D) 5

30. حاصل معادله $\frac{0.2x-0.1}{x-0.8} = 0.1$ را بدست آورید؟

(A) $1/6$ (B) $2/6$ (C) $1/7$ (D) $1/5$

31. از معادله $x + 3 = 0.2x - 7$ قیمت x را حاصل نمائید؟

(A) -12.5 (B) 3 (C) -1 (D) 4

32. از مساوات $(2-x)^2 = x(x-2)$ قیمت x را حاصل نمائید؟

(A) 8 (B) 3 (C) 2 (D) 4

33. جذر معادله $1 + \frac{1}{1 - \frac{x}{x+1}} = 4$ را دریافت نمائید؟

(A) 2 (B) -1 (C) -3 (D) -2

34. در معادله $\frac{\frac{1}{2}-x}{1-x} = 0.1$ قیمت x چند است؟
 1 (A) 4/9 (B) 6/11 (C) 5/6 (D)
35. حاصل معادله $(1.1)^2 - (0.1)^2 = 0.2x$ چیست؟
 2 (A) 4 (B) 3 (C) 6 (D)
36. حاصل مساوات $\sqrt[3]{0.027} = \frac{1}{3}x$ را بدست آورید؟
 1 (A) 4/9 (B) 6/11 (C) 10/9 (D)
37. قیمت x در معادله $12! - x(10!) = 130 \cdot (10!)$ کدام گزینه است؟
 1 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D)
38. کدام گزینه حل معادله $\frac{3y-1}{y^2-y} - \frac{2}{y-1} = \frac{3}{y}$ است؟
 0 (A) 1 (B) 2 (C) (D) هیچکدام
39. قیمت t در معادله $0.42 - 0.03t = 3.33 - t$ چند است؟
 0 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D)
40. از معادله $\frac{x}{2x-3} - \frac{2}{3-2x} = 4$ قیمت x را بدست آورید؟
 8 (A) 9/2 (B) 4 (C) 6 (D)
41. قیمت x را از معادله $\frac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x}} = 1$ دریابید؟
 1/2 (A) 4/9 (B) 6/11 (C) 10/9 (D)
42. حل معادله $\frac{x-\frac{x}{0.2}}{0.3} + 36 = 0$ کدام گزینه است؟
 1 (A) 2 (B) 4 (C) 3 (D)
43. قیمت x را از معادله $ax + b^2 = a^2 + bx$ بدست آورید؟
 (A) $a-b$ (B) $a+b$ (C) a (D) $\frac{2b}{a}$
44. مقدار x را از معادله $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a}\right) = 1$ حاصل کنید؟
 (A) a (B) $2a$ (C) $\frac{a-1}{a}$ (D) $\frac{a}{a+1}$

45. مقدار x را از معادله $\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=2$ در یابید؟
 (A) -9 (B) -5 (C) -1 (D) 7
46. کدام گزینه میتواند حل معادله $\frac{x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=x-2$ باشد؟
 (A) 1 (B) 3 (C) 2 (D) 4
47. در معادله $2-[2-(2-x)]=x$ قیمت x مساوی به کدام گزینه است؟
 (A) -2 (B) -1 (C) 2 (D) 1
48. مقدار a را از معادله $\frac{12}{x+a}+\frac{2}{x-5}-\frac{2}{x-6}=\frac{2}{3}$ در صورتی بدست آورید که $x=8$ باشد؟
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
49. مقدار $x+y+z$ را از سیستم معادلات $\begin{cases} -2x+3y-4z=32 \\ 3x-2y+5z=24 \end{cases}$ دریافت نمائید؟
 (A) 56 (B) 28 (C) 42 (D) 48
50. از سیستم معادلات $\begin{cases} a+10b+14c=30 \\ a+5b+7c=32 \end{cases}$ مقدار a را دریابید؟
 (A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36
51. کدام گزینه مقدار x در معادله $\frac{x+y+9}{x+y}=10$ است؟
 (A) $1+y$ (B) $1-y$ (C) $\frac{1+y}{2}$ (D) $\frac{1+y}{9}$
52. مقدار x را از معادله $3-\frac{1}{2+\frac{x}{1-\frac{1}{2}}}=2$ بدست آورید؟
 (A) -2 (B) -1 (C) -2/3 (D) -1/2

در هر یک از معادلات ذیل قیمت x را دریافت کنید.

53) $2+\frac{21}{4-\frac{5}{x-1}}=9$

- 1) $x=-5$ 2) $x=5$ 3) $x=-6$ 4) $x=6$

54) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)=\frac{4}{3}$

- 1) $x=-8$ 2) $x=8$ 3) $x=9$ 4) $x=-9$

55) $1 + \frac{18}{4 + \frac{5}{x+1}} = 7$

1) $x = -5$

2) $x = 5$

3) $x = -6$

4) $x = 6$

56) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x-1}\right)\left(1 - \frac{1}{x-2}\right) = \frac{2}{5}$

1) $x = -5$

2) $x = 5$

3) $x = -6$

4) $x = 6$

57) $1 + \frac{15}{2 + \frac{9}{x+1}} = 4$

1) $x = 2$

2) $x = 3$

3) $x = -3$

4) $x = -2$

58) $\left(2 - \frac{2}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x-1}\right)\left(1 - \frac{2}{x-3}\right) = \frac{1}{3}$

1) $x = -5$

2) $x = 5$

3) $x = -6$

4) $x = 6$

59) $\left(1 - \frac{1}{x-1}\right)\left(1 + \frac{1}{x-2}\right)\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \frac{2}{3}$

1) $x = -5$

2) $x = 5$

3) $x = -6$

4) $x = 6$

60) $\frac{2x-1}{5} + \frac{x-4}{2} = \frac{x+2}{10}$

1) $x = 2$

2) $x = 3$

3) $x = -3$

4) $x = -2$

61) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

1) $x = -\frac{1}{3}$

2) $x = \frac{1}{3}$

3) $x = -\frac{1}{2}$

4) $x = \frac{1}{2}$

62) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

1) $x = 2$

2) $x = 3$

3) $x = -3$

4) $x = -2$

63) $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

1) $x = 2$

2) $x = 3$

3) $x = -3$

4) $x = -2$

64) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)$ $\begin{matrix} x=0 \\ x=5/3 \end{matrix}$

1) $\begin{matrix} x=0 \\ x=3/5 \end{matrix}$

2) $\begin{matrix} x=5/3 \\ x=0 \end{matrix}$

3) $\begin{matrix} x=0 \\ x=-5/3 \end{matrix}$

4) $\begin{matrix} x=0 \\ x=5/3 \end{matrix}$

65) برای کدام قیمت k معادله $\frac{x}{k-x} + \frac{k-a}{x} = \frac{k}{x}$ دارای جواب 2 می باشد؟

- (1) $k = -5$ (2) $k = 5$ (3) $k = -4$ (4) $k = 4$

66) برای کدام قیمت k معادله $\frac{4-x}{2-2x} = \frac{3x^2+k}{(x^2+1)^2-68}$ دارای جواب -3 می باشد؟

- (1) $k = 1$ (2) $k = -1$ (3) $k = 2$ (4) $k = -2$

67) $\frac{4}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} = 0$

- 1) $x = -8/5$ 2) $x = 8/5$ 3) $x = -5/8$ 4) $x = 5/8$

68) $\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x-1 + \frac{1}{x}} = 7$

- 1) $x = -5$ 2) $x = 5$ 3) $x = 6$ 4) $x = -6$

69) $\frac{2x^2}{x-1} + \frac{5x-3}{1-x} = 3$

- 1) $x = 3$ 2) $x = -3$ 3) $x = 4$ 4) $x = -4$

70) $\frac{\frac{x - \frac{1}{x}}{x+1}}{\frac{x - \frac{1}{x^2}}{x^2+x+1}} = 4$

- 1) $x = 3$ 2) $x = -3$ 3) $x = 4$ 4) $x = -4$

71) معادله $\frac{2x-1}{5} + \frac{x-4}{2} = \frac{x+2}{10}$ عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 3

72) x را از معادله $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{x-2}{6}$ دریافت کنید؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

73) جذور معادله $\frac{x-3}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 2x$ عبارت است از:

- (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{13}{9}$ (4) $\frac{14}{9}$

(74) x را از معادله $\frac{x-3}{2} + \frac{x-5}{3} = \frac{x-1}{4}$ دریافت کنید.

(1) 1 (2) 3 (3) 5 (4) 4

(75) قیمت x در معادله $\frac{5x-5}{4} = 2 - \frac{2x-4}{8}$ مساوی است به:

(1) $\frac{2}{5}$ (2) $-\frac{2}{5}$ (3) $\frac{7}{6}$ (4) $-\frac{7}{6}$

(76) قیمت x در معادله $\frac{x+2}{5} - \frac{x-3}{6} - 1 = 0$ مساوی است به:

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(77) در معادله $x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ قیمت x برابر است با:

(1) 2 (2) 3 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

(78) در معادله $\frac{x-4}{3} - \frac{x-2}{9} = 0$ قیمت x برابر است با:

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

(79) قیمت x در معادله $\frac{x-2}{5} - 1 - \frac{x+2}{10} = 0$ برابر است با:

(1) 14 (2) -6 (3) -14 (4) 6

(80) در معادله $x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = 0$ قیمت x برابر است با:

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $-\frac{3}{4}$ (4) $-\frac{4}{3}$

(81) در معادله $4x - 3 - \frac{2x+6}{2} = 0$ قیمت x برابر است با:

(1) 2 (2) 3 (3) -2 (4) 4

(82) قیمت x در معادله $\frac{2x-3}{3} + x - \frac{x+5}{2} = 0$ مساوی است به:

(1) 3 (2) 4 (3) -3 (4) -4

(83) در معادله $\frac{x-1}{x} - \frac{x+2}{x+1} = 0$ قیمت x برابر است به:

$$\begin{array}{cccc} 2 & (1) & -2 & (2) \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

(84) جذر معادله $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} - x + \frac{1}{3} = 0$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} 1 & (1) & -2 & (2) \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

(85) در معادله $\frac{x+2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$ قیمت x عبارت است از:

$$\begin{array}{cccc} 1 & (1) & -4 & (2) \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

(86) در معادله $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 25 = 0$ قیمت x برابر است به:

$$\begin{array}{cccc} 12 & (1) & 15 & (2) \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

(87) در معادله $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$ قیمت x برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} 26 & (1) & 36 & (2) \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

(88) در معادله $2\frac{1}{5} - \frac{3}{2}x = -0.8$ قیمت x عبارت است از:

$$\begin{array}{cccc} 0 & (1) & 1 & (2) \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

(89) m را طوری دریافت کنید که دو معادله $4x+1=6x+9$ و $\frac{x+m}{2}+4-m=0$ دارای جواب مساوی باشند.

$$\begin{array}{cccc} 1 & (1) & 2 & (2) \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

(90) مجموع سه عدد تاق مسلسل 27 است عدد وسطی کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 3 & (1) & 7 & (2) \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

خود را بیازمایید!

در هر یک از معادلات ذیل قیمت x را دریافت نمایید.

$$1) \quad \frac{x-3}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 2x$$

$$8) \quad 4 - \frac{2}{3 + \frac{x}{x-2}} = 3$$

$$2) \quad 5 + \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = 4$$

$$9) \quad (2x-3)^3 + (3x+5)^3 - (5x+2)^3 = 0$$

$$3) \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) = \frac{11}{8}$$

$$10) \quad \sqrt[3]{x^3 \sqrt{x \sqrt{x}}} = 5$$

$$11) \quad (7x-5)^3 + (4-3x)^3 + (1-4x)^3 = 0$$

$$4) \quad 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}} = -\frac{1}{4}$$

$$12) \quad \frac{x-2}{3} + \frac{2x-1}{5} = 1$$

$$5) \quad (x+1)^3 + (x+2)^3 - (2x+3)^3 = 0$$

$$13) \quad (x+1)^3 + (1-2x)^3 + (x-2)^3 = 0$$

$$6) \quad (x-1)^2 + (x-3)^2 + (2x-8)^2 = 0$$

$$14) \quad (3x+1)^3 + (3-5x)^3 = 8(2-x)^3$$

$$7) \quad (3x+4)^3 + (x-2)^3 - (4x+2)^3 = 0$$

$$15) \quad \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right)$$

شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب
1	$x = \frac{13}{9}$	6	$\begin{cases} x=1 \\ x=3 \\ x=4 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x=5/7 \\ x=4/3 \\ x=1/4 \end{cases}$
2	$x=2$	7	$\begin{cases} x=-4/3 \\ x=2 \\ x=-1/2 \end{cases}$	12	$x = \frac{28}{11}$
3	$x=8$	8	$x=1$	13	$\begin{cases} x=-1 \\ x=2 \\ x=1/2 \end{cases}$
4	$x=6$	9	$\begin{cases} x=3/2 \\ x=-5/3 \\ x=-2/5 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x=-1/3 \\ x=3/5 \\ x=2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \\ x=-3/2 \end{cases}$	10	$x=25$	15	$x = \frac{b}{b+1}$

معادلات معادل

در صورتیکه اطراف یک معادله را به یک مقدار ثابت ضرب و یا تقسیم نمائیم معادله حاصله از لحاظ ظاهر با معادله اول متفاوت است ولی از لحاظ جذور با یکدیگر برابرند به این نوع معادلات معادل می گویند.
به طور مثال دو معادله $2x-5=0$ و $4x-10=0$ با یکدیگر معادل اند و نیز معادلات $3x-y=7+5m$ و $9x-3y=21+15m$ با یکدیگر معادل هستند.

مثال : آیا معادله $3x-15=0$ و $6x-30=0$ دو معادله معادل اند؟ اگر بله بناء جذور آنها را بدست آورید؟
حل : بله. این دو معادله معادل اند بناء دارای جذور یکسان اند.

$$6x-30=0 \Rightarrow x=5, \quad 3x-15=0 \Rightarrow x=5$$

دریافت مجهول خواسته شده در معادله نظر به دیگر مجهولات

برای دریافت مجهول خواسته شده متباقی مجهولات را به حیث حدود معلوم در نظر گرفته قیمت مجهول خواسته شده را حاصل می نمائیم.

مثال : در معادله داده شده قیمت x را دریافت نمائید؟

حل :

$$2x^2 = 7 - 5 - y \Rightarrow 2x^2 = -y + 2 \Rightarrow x^2 = \frac{-y+2}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-y+2}{2}} \quad 2x^2 + y + 5 = 7$$

مثال : قیمت y را در معادله $\frac{3}{2}x - 7y = 4$ دریافت نمائید؟

حل :

$$\frac{3}{2}x - 7y = 4 \Rightarrow 7y = \frac{3}{2}x - 4 \Rightarrow y = \frac{3}{14}x - \frac{4}{7}$$

معادلات دو مجهوله درجه یک

شکل عمومی این نوع معادلات $ax+by=c$ است طوریکه $a, b, c \in \mathbb{R}$ ضریب و y, x مجهولات در معادله می باشد.

نکته : یک معادله دو مجهوله درجه یک دارای بی نهایت حل می باشد ، یعنی به طور کلی گفته می توانیم معادله دو مجهوله دارای حل مشخص نمی باشد.

مثال : جذور معادله $2x + 4y = 3$ را دریافت نمائید؟

حل : این نوع معادلات دارای بی نهایت جذر می باشد یک تعداد آن قرار ذیل است :

$$1) \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{4} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

سیستم معادلات دو مجهوله درجه یک

شکل عمومی سیستم معادلات دو مجهوله درجه یک به صورت $\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$ می باشد طوریکه C_1

A_1, A_2, B_1, B_2, C_2 ضرایب عددی بوده و شامل اعداد حقیقی اند و y, x مجهولات معادله می باشد.

حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه یک :

منظور از حل سیستم معادلات دو مجهوله دریافت قیمت های مشخص برای x و y است طوریکه این عدد همزمان در هر دو معادله صدق کند.

روش های حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه یک :

1) (طریقه تعویضی :

در این روش از یک معادله قیمت یک مجهول را از جنس مجهول دیگر حاصل نموده در معادله دیگر تعویض می نمائیم یک معادله یک مجهوله درجه 1 حاصل می شود و با حل آن قیمت مجهول حاصل می شود.

مثال : قیمت x و y را از سیستم معادلات $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$ دریافت نمائید؟

حل :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} ; \quad 2x + 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5 - 2x}{3}$$

$$3x + 4\left(\frac{5 - 2x}{3}\right) = 7 \Rightarrow 9x + 20 - 8x = 21 \Rightarrow x = 1$$

$$y = \frac{5 - 2x}{3} = \frac{5 - 2(1)}{3} = 1 \Rightarrow y = 1$$

2) (طریقه افنا :

در این طریقه ابتدا با استفاده از قوانین مساوات ضرایب یکی از مجهولات را در هر دو معادله برابر ساخته در صورت هم علامه بودن اطراف معادله را تفریق و در صورت مختلف علامه بودن اطراف معادله را طرف به طرف با یکدیگر جمع می نمائیم با این عمل یکی از مجهولات حذف شده قیمت مجهول دیگر حاصل می شود. نکته : جهت برابر ساختن ضرایب یک مجهول در دو معادله اطراف معادله بالا را در ضریب مجهول معادله پایین و اطراف معادله پایین را در ضریب مجهول معادله بالا ضرب می نمائیم.

حل سیستم معادله $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ را دریافت نمائید؟

حل :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2(3x + 2y) = (4)(2) \\ 3(2x - 3y) = (-1)(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 8 \\ -6x - 9y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13y = 11 \\ y = \frac{11}{13} \end{cases}$$

قیمت y را در یکی از معادلات وضع نموده قیمت x حاصل می شود.

$$3x + 2y = 4 \Rightarrow 3x + 2\left(\frac{11}{13}\right) = 4 \Rightarrow x = \frac{10}{13}$$

(3) روش مساوات

در این روش قیمت یکی از مجهولات را در هر دو معادله دریافت نموده همراه یکدیگر مساوی قرار داده و با حل آن قیمت مجهولات حاصل می شود.

مثال : حل سیستم معادله $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$ را دریافت نمائید؟

حل :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3y}{2} \\ x = \frac{10 - 2y}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{-3y}{2} = \frac{10 - 2y}{3}$$

$$-9y = 20 - 4y \Rightarrow -5y = 20 \Rightarrow y = -4$$

$$x = \frac{-3y}{2} \Rightarrow x = \frac{-3(-4)}{2} = 6$$

گراف معادلات دو مجهوله درجه یک ($Ax + By = C$)

گراف معادلات دو مجهوله درجه 1 به صورت یک خط مستقیم می باشد برای ترسیم گراف این معادله دو جوره مرتب آنرا مشخص نموده با وصل نمودن این دو نقطه گراف معادله ترسیم می شود.

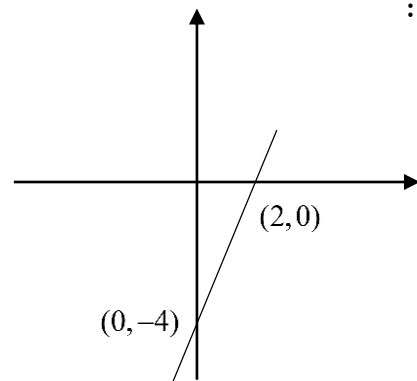
نکته : معمولاً جهت ترسیم دقیق گراف یک مرتبه به متحول x قیمت صفر می دهیم تا تقاطع گراف با محور y حاصل شود و مرتبه دیگر به y قیمت صفر داده می شود تا تقاطع با محور x حاصل شود.

مثال : گراف معادله $2x - y = 4$ را ترسیم نمائید؟

حل :

$$x = 0 \Rightarrow 2(0) - y = 4 \Rightarrow y = -4 ; (0, -4)$$

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 0 = 4 \Rightarrow x = 2 ; (2, 0)$$

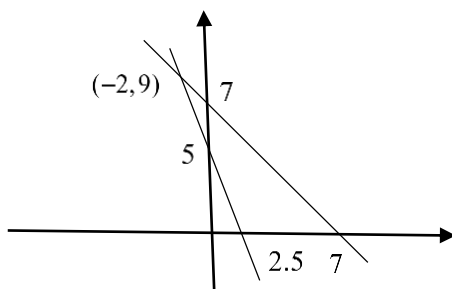


4) حل سیستم معادلات به روش ترسیم گراف :

برای دریافت حل سیستم به روش ترسیم گراف ابتدا گراف هر یک از معادلات سیستم را ترسیم نموده مختصات نقطه تقاطع گراف ها حل همزمان سیستم است.

مثال : سیستم $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ را به روش ترسیم گراف حل نمائید؟

حل : ابتدا گراف هر دو معادله را ترسیم می نمائیم در صورت تقاطع مختصات نقطه تقاطع حل سیستم است در صورت موازی شدن سیستم دارای حل نمی باشد و در صورت منطبق شدن سیستم دارای بی نهایت حل است.



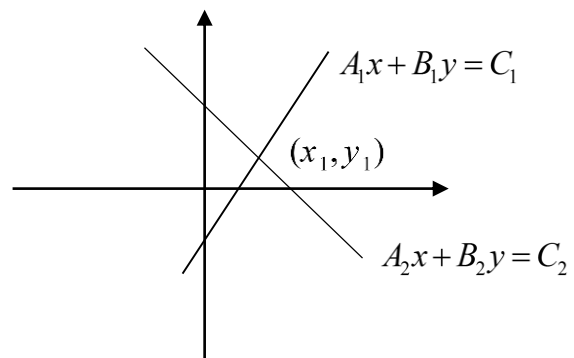
نقطه تقاطع دارای مختصات $(-2, 9)$ است بناءً $x = -2$ و $y = 9$ است.

$$\begin{array}{l} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} X & 7 & 0 \\ \hline Y & 7 & 0 \\ \hline X & 0 & 5/2 \\ \hline Y & 5 & 0 \end{array}$$

تشخیص تعداد حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه یک :

1) هر گاه نسبت بین ضرایب مجهول x و y با یکدیگر برابر نباشد معادله دارای حل مشخص است و گراف آنها نیز یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

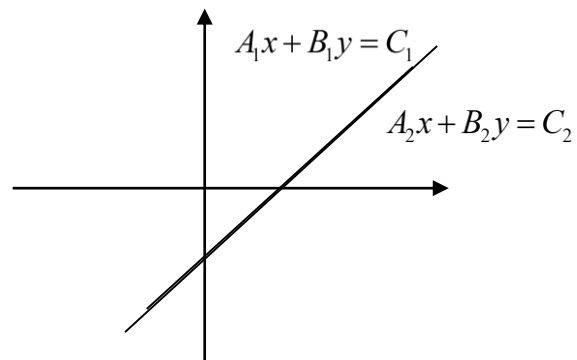
$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$



2) هرگاه نسبت بین ضرایب مجهولات دو معادله برابر و نیز برابر به نسبت عدد ثابت باشد معادله دارای بی نهایت حل می باشد و گراف این دو معادله با یکدیگر منطبق می شود. در این حالت اگر معادله را از طریق های دیگر حل نمائیم مجهولات و عدد ثابت از بین می رود.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

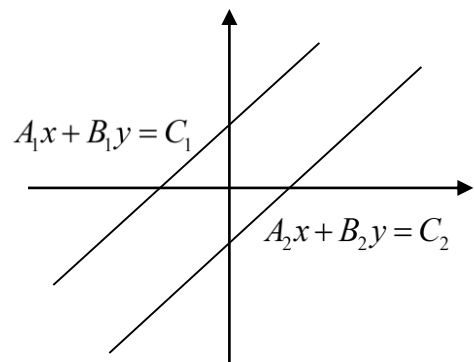
$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



3) هرگاه نسبت بین ضرایب مجهولات با یکدیگر برابر ولی با نسبت اعداد ثابت برابر نشود سیستم دارای حل نمی باشد و گراف این دو معادله با یکدیگر موازی شده در صورت حل به روش های دیگر مجهول از بین رفته ولی عدد ثابت باقی می ماند.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$



مثال : جواب های سیستم زیر را بر حسب مقادیر مختلف m بررسی کنید؟

$$\begin{cases} (2m-3)x - 10y = 3m + 28 \\ mx + (m-1)y = 5 \end{cases} ; \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \frac{2m-3}{m} = \frac{-10}{m-1} \Rightarrow (2m-3)(m-1) = -10m$$

$$2m^2 - 5m + 3 = -10m \Rightarrow 2m^2 + 5m + 3 = 0 \Rightarrow m_1 = -1, \quad m_2 = -\frac{3}{2}$$

$$1) \text{ If } m = -1 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = 5, \quad \frac{C_1}{C_2} = 5$$

در این حالت سیستم بی نهایت حل دارد زیرا :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$2) \text{ If } m_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = 4, \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{9}{4}$$

در این حالت سیستم حل ندارد زیرا :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$3) \text{ If } m \neq -1, \quad m \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

در این حالت سیستم دارای حل مشخص است.

سیستم معادلات سه مجهوله درجه یک

حل سیستم معادلات سه مجهوله به روش افناء :

ابتدا دو معادله از سیستم را انتخاب می کنیم و به روش افناء یکی از مجهول ها را حذف می کنیم تا یک معادله با دو مجهول حاصل شود. بعد از آن دو معادله دیگر سیستم را انتخاب نموده مجهولی را که قبلا حذف نمودیم مجددا حذف می نمائیم تا یک معادله دیگر با همان دو مجهول حاصل شود. به این ترتیب یک سیستم معادله دو مجهول حاصل می شود با حل این سیستم قیمت دو مجهول حاصل می شود و با وضع نمودن این دو مجهول در یکی از معادلات مجهول سوم نیز حاصل می شود.

مثال : سیستم معادلات زیر را به روش افناء حل نمائید؟

$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 21 \\ 3x + 4y - z = 20 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

حل : ابتدا معادله اول را در 4 ضرب و با معادله دوم جمع می کنیم.

$$\begin{cases} 20x - 4y + 8z = 84 \\ 3x + 4y - z = 20 \\ \hline 23x + 7z = 104 \end{cases}$$

حال معادله اول و سوم را همراه یکدیگر جمع می کنیم.

$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 21 \\ x + y - 2z = -3 \\ \hline 6x = 18 \end{cases}$$

حال سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را حل می نمائیم.

$$\begin{cases} 23x + 7z = 104 \\ 6x = 18 \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

$$23x + 7z = 104 \Rightarrow x = 3 \rightarrow 69 + 7z = 104 \Rightarrow z = 5$$

$$x + y - 2z = -3, \quad x = 3, \quad z = 5 \Rightarrow 3 + y - 10 = -3 \Rightarrow y = 4$$

حل سیستم معادلات سه مجهوله درجه یک به روش تعویضی :

برای حل به روش تعویضی ابتدا یکی از معادله های سیستم را انتخاب می کنیم قیمت یک مجهول را از جنس دو مجهول دیگر دریافت نموده در دو معادله دیگر تعویض می کنیم تا یک سیستم معادله دو مجهوله حاصل شود با حل این سیستم جوابات سیستم حاصل می شود.

مثال : سیستم معادلات زیر را به روش تعویضی حل نمائید؟

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 22 \\ 2x + y - 3z = 5 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

حل: ابتدا از معادله سوم قیمت x را حاصل نموده در دو معادله دیگر تعویض می نمائیم.

$$x = 3y - 2z - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3(3y - 2z - 1) - 2y + 5z = 22 \\ 2(3y - 2z - 1) + y - 3z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y - z = 25 \\ 7y - 7z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y - z = 25 \\ -y + z = -1 \end{cases}$$

$$-6y = 24 \Rightarrow y = 4$$

$$-y + z = -1 \Rightarrow -4 + z = -1 \Rightarrow z = 3$$

$$x = 3y - 2z - 1 \Rightarrow x = 3(4) - 2(3) - 1 \Rightarrow x = 12 - 6 - 1 = 5$$

سوالات سیستم معادلات دو مجهوله و سه مجهوله

1. برای کدام قیمت های m سیستم $\begin{cases} mx - y = 6 \\ -4x + my = 2 \end{cases}$ حل مشخص ندارد؟

- (A) $m = 0$ (B) $m = \pm 1$ (C) $m = \pm 2$ (D) $m = \pm 3$

2. سیستم معادلات $\begin{cases} 2a + 3b = 11 \\ 3a - b = 11 \end{cases}$ دارای :

- (A) حل نیست (B) یک حل دارد (C) دو حل دارد (D) بی نهایت حل دارد

3. سیستم معادلات $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 = 1 \end{cases}$ دارای :

- (A) حل نیست (B) یک حل دارد (C) دو حل دارد (D) بی نهایت حل دارد

4. سیستم معادلات $\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ 6x - 10y = 20 \end{cases}$ دارای :

- (A) حل نیست (B) یک حل دارد (C) دو حل دارد (D) بی نهایت حل دارد

5. قیمت x در معادله $\begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ عبارت است از :

- (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) 3

6. قیمت y در معادله $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 5y = 20 \end{cases}$ کدام است؟

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

7. نسبت x و y در معادله $\begin{cases} \frac{5}{2x+y} + \frac{4}{2x-3y} = 5 \\ \frac{15}{2x+y} + \frac{2}{2x-3y} = 5 \end{cases}$ کدام است؟

- (A) 2 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

8. قیمت $x + y$ در سیستم معادلات $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ کدام است؟

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7

9. قیمت a در معادله $\begin{cases} a + b = 3p \\ a - b = p \end{cases}$ کدام است؟

- (A) $a = 2p$ (B) $a = p$ (C) $a = -p$ (D) $a = 0$

10. قیمت x در معادله $\begin{cases} x - y = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}$ کدام است؟

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

11. قیمت z در معادله $\begin{cases} x+2y+2z=12 \\ 2x-y+2z=13 \\ 2x+3y-z=8 \end{cases}$ کدام است؟

- (A) 3 (B) -3 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

12. قیمت y در معادله $\begin{cases} 2x=y=3z \\ 2x-3y+4z=-6 \end{cases}$ کدام است؟

- (A) -9 (B) $\frac{9}{2}$ (C) 9 (D) هیچکدام

13. قیمت y در معادله $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$ کدام است؟

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) -1

14. حل سیستم معادلات $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ \frac{y}{3} + z = 2 \\ z + \frac{x}{2} = 2 \end{cases}$ کدام است؟

- (A) (1, 2, 3) (B) (3, 2, 1) (C) (2, 3, 1) (D) (2, 1, 3)

15. در سیستم معادلات $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=7 \\ x+z=10 \end{cases}$ قیمت $x+2y+3z$ را دریافت کنید.

- (1) 23 (2) 22 (3) 24 (4) 21

16. قیمت‌های x ، y و z را از سیستم معادلات $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{5} \\ x+4y-z=5 \end{cases}$ دریافت کنید.

(1) $\begin{cases} x=-7 \\ y=2 \\ z=10 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=10 \\ y=2 \\ z=7 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=7 \\ y=2 \\ z=10 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=2 \\ y=7 \\ z=10 \end{cases}$

17. قیمت افاده $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ را از سیستم معادلات $\begin{cases} x+y=7axy \\ y+z=2ayz \\ x+z=3axz \end{cases}$ دریافت کنید.

- (1) $6a$ (2) $-6a$ (3) a (4) $5a$

(18) از سیستم معادلات $\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6} \end{cases}$ قیمت افاده $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}$ در دریافت کنید.

17 (4)

16 (3)

14 (2)

15 (1)

(19) a و b را طوری دریافت کنید که سیستم معادلات $\begin{cases} x+ay=1 \\ bx-y=3 \end{cases}$ دارای بی نهایت حل باشد.

$$\begin{matrix} a=3 \\ b=-1/3 \end{matrix} \quad (4)$$

$$\begin{matrix} a=-1/3 \\ b=-3 \end{matrix} \quad (3)$$

$$\begin{matrix} a=1/3 \\ b=3 \end{matrix} \quad (2)$$

$$\begin{matrix} a=-1/3 \\ b=3 \end{matrix} \quad (1)$$

(20) از سیستم معادلات $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ قیمت $x+2y+3z$ را دریافت کنید.

9 (4)

10 (3)

12 (2)

11 (1)

(21) m را چنان دریافت کنید که سیستم معادلات $\begin{cases} (m-1)x+3y=4 \\ mx+y=1 \end{cases}$ حل نداشته باشد.

$$m=-1/4 \quad (4)$$

$$m=-1/3 \quad (3)$$

$$m=-1/2 \quad (2)$$

$$m=1/2 \quad (1)$$

(22) a را چنان دریافت کنید که سیستم معادلات $\begin{cases} ax+y=1 \\ x-3y=-3 \end{cases}$ بی نهایت حل داشته باشد.

$$a=-1/5 \quad (4)$$

$$a=1/3 \quad (3)$$

$$a=-1/3 \quad (2)$$

$$a=-1/4 \quad (1)$$

(23) a را طوری دریافت کنید که سیستم معادلات $\begin{cases} ay+x=1 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ دارای یک حل باشد.

$$a=-\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$a \neq -\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$a \neq \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$a=\frac{3}{2} \quad (1)$$

(24) برای کدام قیمت‌های m و n سیستم معادلات $\begin{cases} nx+(m-1)y=2 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ بی نهایت حل دارد.

$$\begin{cases} m=-5 \\ n=2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} m=5 \\ n=2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} m=-5 \\ n=-2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} m=5 \\ n=-2 \end{cases} \quad (1)$$

(25) برای کدام قیمت‌های m سیستم معادلات $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+y=m^2+m+1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ دارای جواب می باشد.

$$\begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases} (4)$$

$$\begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases} (3)$$

$$\begin{cases} m=-1 \\ m=-2 \end{cases} (2)$$

$$\begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases} (1)$$

(26) a و b را طوری دریافت کنید که سیستم معادلات $\begin{cases} ax+6y=4 \\ 2x+by=2 \end{cases}$ بی‌نهایت حل داشته باشد.

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases} (4)$$

$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} (3)$$

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=-3 \end{cases} (2)$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} (1)$$

(27) m را طوری دریافت کنید که سیستم معادلات $\begin{cases} mx+2y=m+1 \\ 2x+my=3 \end{cases}$ حل نداشته باشد.

$$m=2 (4)$$

$$m=-2 (3)$$

$$m=-3 (2)$$

$$m=3 (1)$$

(28) حل سیستم معادلات $\begin{cases} x+2y-z=6 \\ 2x-y+z=5 \\ x-3y-z=-4 \end{cases}$ مساوی است به:

$$\begin{cases} x=7 \\ y=8 \\ z=9 \end{cases} (4)$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=5 \\ z=3 \end{cases} (3)$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} (2)$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} (1)$$

(29) حل سیستم معادلات $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+3z=-6 \\ 2x-y-z=-3 \end{cases}$ مساوی است به:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases} (4)$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} (3)$$

$$\begin{cases} x=7 \\ y=6 \\ z=5 \end{cases} (2)$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases} (1)$$

(30) حل سیستم $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ x + \frac{2}{3}y = \frac{35}{3} \end{cases}$ عبارت است از:

$$(-4, 9) (4)$$

$$(9, 4) (3)$$

$$(4, 9) (2)$$

$$(-9, 4) (1)$$

خود را بیازمایید!

سیستم‌های معادلات ذیل را حل کنید.

1)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{4} \\ x - y = 3 \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} y - \frac{3}{2}x = -5 \\ 2y + 5x = -3 \end{cases}$$

9)
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ z + x = 4 \end{cases} \Rightarrow x + 3y + 2z = ?$$

3)
$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

10)
$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = -31 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

11)
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5} \\ 2x + 3y + z = 19 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

12)
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

13)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2y + xy^2 = 120 \end{cases}$$

شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب
1	$\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 7 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 7/8 \\ y = -59/16 \end{cases}$	7	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 9/5 \\ y = -13/5 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1/5 \\ y = 18/5 \end{cases}$	9	13		
5	$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = -1/2 \\ y = 1/7 \end{cases}$		

مسائل عبارتی

مسائل عبارتی به مسائلی گفته می شود که به شکل جملات غیر الجبری ارائه شده و برای حل مسئله با تجزیه و تحلیل جملات غیر الجبری را به شکل معادلات الجبری در آورده پس از آن قیمت مجهول را از این معادله حاصل می نماییم.

برای حل مسائل عبارتی نکات ذیل برای تبدیل مسائل عبارتی به شکل معادله الجبری ضروری می باشد.

1) اگر از بین دو عدد، عدد خورد x باشد و عدد کلان 2 چند آن باشد مجموع دو عدد و عدد کلان کدام است.

$$x + 2x = 3x = \text{مجموع دو عدد}, \quad 2x = \text{عدد کلان}, \quad x = \text{عدد خورد}$$

2) اگر عدد خورد x باشد و عدد دیگر به اندازه 2 واحد از آن بزرگتر باشد عدد بزرگ کدام است.

$$x + 2 = \text{عدد کلان}, \quad x = \text{عدد خورد}$$

3) اگر عدد 50 را بالای n نفر تقسیم نماییم سهم هر نفر چند است.

$$\frac{50}{n} = \text{سهم هر نفر}$$

4) اگر مجموع دو عدد 18 باشد در صورتیکه عدد کوچک X باشد عدد کلان کدام است.

$$18 - x = \text{عدد کلان}, \quad 18 = \text{عدد کلان} + x, \quad 18 = \text{عدد کلان} + \text{عدد خورد}$$

5) عدد اول ثلث عدد دوم است در صورتیکه عدد دوم p باشد عدد اول کدام است.

$$\frac{p}{3} = \text{عدد اول}$$

6) اگر عدد اول از مربع عدد دوم به اندازه 4 واحد کوچکتر باشد در صورتیکه عدد دوم x باشد عدد اول کدام است.

$$x^2 - 4 = \text{عدد اول}$$

7) برای نمایش اعداد طبیعی مسلسل از رابطه ذیل استفاده می نماییم.

$$x, (x+1), (x+2), (x+3), \dots$$

8) برای نمایش اعداد تاق مسلسل از رابطه ذیل استفاده می نماییم.

$$(2x+1), (2x+3), (2x+5), \dots$$

9) برای نمایش اعداد جفت مسلسل از رابطه ذیل استفاده می نماییم.

$$(2x), (2x+2), (2x+4), \dots$$

10) برای طبقه اعداد داریم :

1) برای اعداد یک رقمی از رابطه x استفاده می نماییم.

2) برای اعداد دو رقمی از رابطه $10x+y$ استفاده می نماییم.

3) برای اعداد سه رقمی از رابطه $100x+10y+z$ استفاده می نماییم.

11) برای حل مسائل مربوط به حرکت چنین فرض می شود.

- 1) حرکت با سرعت ثابت انجام می گیرد مگر اینکه در مسئله ذکر شود حرکت تعجیلی است.
- 2) جسمی با سرعت مخصوص x بر روی دریا که سرعت آن y است حرکت می کند دو حالت ذیل به وجود می آید.

- 1) اگر جسم در جهت آب حرکت کند سرعت آن $(x + y)$ است.
- 2) اگر جسم در خلاف جهت آب حرکت کند سرعت آن $(x - y)$ است.

نکات مهم در حل مسائل عبارتی

برای حل یک مسئله عبارتی دو مرحله اجرا می شود ابتدا با توجه به مسئله مجهولات را توسط حروف مشخص می نمایم و در مرحله دوم با توجه به مسئله باید یک معادله از جنس مجهولات تشکیل داده توسط آن قیمت مجهول را حاصل می نمایم.

مثال : پسری 15 سال عمر دارد چهار سال بعد سن پدر $\frac{1}{3}$ حصه سن پدرش میشود پس سن فعلی پدر کدام است؟

حل : $x =$ سن فعلی پدر ، $15 =$ سن فعلی پسر

$x + 4 =$ عمر چهار سال بعد پدر ، $19 =$ عمر چهار سال بعد پسر

$$19 = \frac{1}{3}(x + 4) \Rightarrow x + 4 = 57 \Rightarrow x = 53$$

بنابراین عمر فعلی پدر 53 سال است چهار سال بعد پدر 57 سال می شود پسر 19 ساله در این حالت سن پسر $\frac{1}{3}$ سن پدر است.

مثال : پدري 42 سال و پسرش 9 سال دارد دریابید که چند سال بعد سن پدر 4 برابر سن پسرش می شود؟

حل : مسئله را طوری در نظر میگیریم که پس از گذشت x سال عمر پدر 4 برابر عمر پسرش می شود.

$$4(9 + x) = 42 + x \Rightarrow 36 + 4x = 42 + x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

پس از گذشت 2 سال پدر 44 ساله شده پسر او 11 ساله در این حالت پدر 4 چند پسرش سن دارد.

مثال : عددی از سه چند عدد دیگر 2 واحد کم است اگر حاصل تفریق این اعداد 14 باشد حاصل جمع این اعداد کدام است؟

حل : عدد اول را x در نظر می گیریم پس عدد دوم $3x - 2$ خواهد شد.

$$(3x - 2) - x = 14 \Rightarrow 3x - 2 - x = 14 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

بنابراین یکی از اعداد 8 بوده و دیگری $(8 - 2) = 3$ است یعنی 22 بناء حاصل جمع این دو عدد برابر به 30 می شود.

مثال : در یک صندوق دو نوع کریم دندان 25 گرامه و 37 گرامه موجود است اگر مجموعاً 30 تیوب کریم در صندوق موجود باشد و وزن مجموعی آنها 870 گرام باشد تعداد هر کدام چند دانه است؟

حل : برای حل تعداد کریم دندان 25 گرامه را x و تعداد کریم دندان 37 گرامه را y در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 25x + 37y = 870 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25x - 25y = -750 \\ 25x + 37y = 870 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 12y = 120 \\ y = 10 \end{matrix}$$

$$x + y = 30 \Rightarrow x + 10 = 30 \Rightarrow x = 20$$

مثال : سه عدد مسلسل طبیعی را دریابید که سه چند عدد متوسط از مجموع دو عدد دیگر به اندازه 22 واحد بزرگتر باشد؟

حل : اعداد مسلسل طبیعی $x, (x+1), (x+2), (x+3), \dots$

سه عدد مسلسل طبیعی $x, (x+1), (x+2)$

$$3(x+1) = x + (x+2) + 22 \Rightarrow 3x + 3 = 2x + 24 \Rightarrow 3x - 2x = 24 - 3$$

$$x = 21$$

بناء اعداد مورد نظر 21، 22 و 23 هستند.

سوالات عبارتی

1. عمر پدر 41 سال و عمر فرزندان وی به ترتیب 7، 9 و 13 است چند سال بعد عمر پدر مساوی به مجموع عمر های فرزندان خواهد شد؟
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 10
2. اگر عمر پدر 43 سال و از پسرش 23 سال باشد معلوم نمائید بعد از چند سال عمر پدر دو چند عمر پسر می شود؟
 (A) سه سال قبل (B) سه سال بعد (C) دو سال بعد (D) دو سال قبل
3. نصف کدام عدد از حصه سوم آن به اندازه 15 زیادتر است؟
 (A) 12 (B) 30 (C) 60 (D) 90
4. مجموع سه عدد 180 می باشد هر گاه عدد دوم سه برابر عدد اول و عدد سوم دو برابر عدد دوم باشد نصف عدد اول کدام است؟
 (A) 18 (B) 9 (C) 10 (D) 5
5. عدد 54 را طوری به دو حصه تقسیم نمائید که چهار چند عدد کلان مساوی به پنج چند عدد خورد گردد.
 (A) 24 و 30 (B) 26 و 28 (C) 20 و 34 (D) هیچکدام
6. مجموع دو عدد 19- و حاصل تفریق آن 1- است اعداد کدام اند؟
 (A) -5 و -14 (B) 10 و -9 (C) -9 و -10 (D) -5 و 14
7. حاصل جمع ربع، ثلث و نصف عددی یک واحد بیشتر از خود عدد است این عدد را بدست آورید؟
 (A) 24 (B) 13 (C) 60 (D) 12
8. چهار چند عددی 48 است ثلث آن را بدست آورید؟
 (A) 8 (B) 12 (C) 4 (D) 3
9. مجموع سه عدد 41 است هر گاه مجموع اول و دوم 27 و مجموع دوم و سوم 29 باشد اعداد را بدست آورید؟
 (A) 14, 17, 10 (B) 14, 15, 10 (C) 14, 15, 12 (D) 17, 10, 12
10. مجموع پنج عدد مسلسل طبیعی 115 است عدد وسطی کدام است؟
 (A) 20 (B) 19 (C) 22 (D) 23
11. سه عدد مسلسل طبیعی تا ق را بیابید که مجموع آن ها 105 باشد؟
 (A) 33, 35, 37 (B) 19, 21, 23 (C) 15, 17, 19 (D) 31, 33, 35
12. سه عدد مسلسل طبیعی جفت را بیابید که مجموع آنها 330 باشد؟

108 , 106, 104 (A) 114 , 112 , 110 (B)

116 , 114 , 112 (C) 112 , 110 , 108 (D)

13. حاصل ضرب دو عدد 10 و حاصل جمع مربعات آنها 29 است اعداد را بدست آورید؟

5 , 3 (A) 6 , 4 (B) 5 , 2 (C) 2 , 7 (D)

14. حاصل جمع دو عدد 20 و فرق مربعات آنها 80 است اعداد را بدست آورید؟

8 , 12 (A) 14 , 6 (B) 3 , 17 (C) 5 , 15 (D)

15. مجموع ارقام یک عدد دو رقمی 5 است هر گاه جای ارقام آن را تبدیل کنیم تفاوت آن با عدد اولی 45

است عدد را بدست آورید؟

23 (A) 32 (B) 50 (C) 41 (D)

16. فرق بین دو عدد 2 و فرق بین مربعات آن 24 است اعداد مذکور را بدست آورید؟

9 , 7 (A) 10 , 8 (B) 4 , 6 (C) 7 , 5 (D)

17. عددی را بدست آورید که هر گاه با $\frac{2}{3}$ خودش جمع گردد مساوی 50 گردد؟

15 (A) 18 (B) 35 (C) 30 (D)

18. گنجایش یک ظرف پنج برابر ظرف دیگر است. اگر مجموع گنجایش ظرف بزرگ و خورد 3 li باشد.

هر ظرف چه قدر گنجایش دارد؟

0.25 Li و 2.75 Li (A) 0.5Li و 2.5 Li (B) 1 Li و 2 Li (C) هیچکدام (D)

19. در یک اتاق تعداد چوکی ها نسبت به میزها ده پایه بیشتر است اگر از تعداد میزها یکی کم گردد تعداد

چوکی ها دو چند می گردد تعداد میزها را محاسبه کنید؟

22 (A) 10 (B) 12 (C) 11 (D)

20. درچه صورت محیط و مساحت مربع با هم مساوی است؟

a=1 (A) a=2 (B) a=3 (C) a=4 (D)

21. درچه صورت محیط و مساحت دایره با هم مساوی است؟

r=1 (A) r=2 (B) r=3 (C) r=π (D)

22. درچه صورت حجم و مساحت کل مکعب با هم مساوی است؟

a=1 (A) a=6 (B) a=3 (C) a=2 (D)

23. طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای $2x + 1$ و $2x - 1$ و x است ($x > 1$) ، طول ضلع متوسط

کدام است؟

13 (A) 15 (B) 17 (C) 19 (D)

معادلات یک مجهوله درجه دوم

هر معادله که بعد از ساده سازی و انتقال حدود به طرف چپ به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل شود ($a \neq 0$) به نام معادله درجه دوم یاد می‌گردد. طوریکه a, b, c مقادیر ثابت هستند.

معادلات یک مجهوله درجه دوم کامل و ناقص :

هر گاه a, b, c اعداد خلاف صفر باشند معادله را کامل گویند اما در صورتیکه b, c و یا هر دوی آنها مساوی به صفر باشند معادله را ناقص می‌گویند.

شکل عمومی و طریقه حل معادلات ناقص قرار ذیل میباشد :

1- اگر $c=0$ باشد معادله به صورت $ax^2 + bx = 0$ بوده و برای حل آن x را فاکتور گرفته و آنها را مساوی به صفر قرار می‌دهیم.

$$5x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(5x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

نکته : هرگاه $c=0$ باشد یک جذر معادله حتما صفر است.

2- اگر $b=0$ باشد معادله به صورت $ax^2 + c = 0$ بوده و در صورتی جذور آن حقیقی است که حاصل $-\frac{c}{a}$ مثبت باشد.

$$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

نکته : اگر $b=0$ باشد معادله دارای دو جذر متضاد میباشد.

3- در صورتیکه $b=c=0$ باشد معادله به صورت $ax^2 = 0$ بوده و جذور آن مساوی به صفر است.

$$4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

سوال : معادله $(3x-2)^2 + (x+1)^2 = 5x^2 - 7x + 8$ را به صورت معیاری نوشته و قیمت های a, b, c را مشخص کنید؟

حل : ابتدا $(3x-2)^2$ و $(x+1)^2$ را انکشاف داده و حاصل را ساده مینمائیم.

$$(9x^2 - 12x + 4) + (x^2 + 2x + 1) = 5x^2 - 7x + 8 \Rightarrow 10x^2 - 10x + 5 = 5x^2 - 7x + 8$$

حدود طرف راست را به طرف چپ انتقال داده و ساده مینمائیم.

$$10x^2 - 10x + 5 - 5x^2 + 7x - 8 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = -3 \end{cases}$$

سوال : معادله $(x+2)^2 + (x-2)^2 = x^2$ را به صورت معیاری نوشته و قیمت های a , b , c را مشخص کنید؟

$$(x+2)^2 + (x-2)^2 = x^2 \Rightarrow (x^2 + 4x + 4) + (x^2 - 4x + 4) = x^2 \Rightarrow x^2 + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 8 \end{cases}$$

روش های حل معادله یک مجهول درجه دوم

جهت حل معادلات درجه دوم از روشهای مختلفی استفاده میگردد برخی از این روشها عبارت اند از :

1- تجزیه به عوامل ضربی درجه اول :

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

2- فکتور گیری :

$$4x^2 + 5x = 0$$

از روش فوق برای حل معادلات ناقص با شکل عمومی $ax^2 + bx = 0$ استفاده میگردد.

3- تکمیل مربع :

$$x^2 - 2x - 11 = 0$$

4- فارمول محمد بن موسی خوارزمی :

$$x^2 - 2x - 11 = 0$$

5- طریقه گراف و یا هندسی

دریافت جذور معادله به روش تجزیه :

در این طریقه ابتدا معادله را به عوامل ضربی درجه اول تجزیه نموده و هر عامل ضربی را مساوی به صفر قرار میدهم تا قیمت های x حاصل شود.

مثال :

$$1) \quad x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow 1 - (x+2) = 0 \quad x_1 = -2$$

$$(x+3) = 0 \quad x_2 = -3$$

$$2) \quad 5x^2 + 12x + 4 = 0 \Rightarrow (5x+2)(x+2) = 0 \Rightarrow 1 - (5x+2) = 0 \quad x_1 = -\frac{2}{5}$$

$$(x+2) = 0 \quad x_2 = -2$$

$$3) \quad x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+3) = 0 \Rightarrow 1 - (x-7) = 0 \quad x_1 = 7$$

$$(x+3) = 0 \quad x_2 = -3$$

حل معادلات به طریق تکمیل مربع :

برای حل معادلات درجه دوم به طریق تکمیل مربع مراحل ذیل را در نظر میگیریم.

1- اطراف معادله را بر ضریب x^2 یعنی a تقسیم مینمائیم .

2- عدد ثابت را به طرف راست انتقال میدهیم.

3- ضریب x یعنی b را بر 2 تقسیم و مربع آن را با هر طرف معادله جمع میکنیم.

4- طرف چپ معادله شکل مربع کامل را دارد. لذا آن را به صورت $(a \pm b)^2$ مینویسیم.

5- از هر دو طرف مساوات جذر گرفته و حد ثابت را به طرف دیگر مساوات انتقال می دهیم.

مثال :

$$3x^2 - 2x - 5 = 0 ;$$

حل:

$$(3x^2 - 2x - 5) / 3 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{(\frac{2}{3})^2}{2} = \frac{2}{6}$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + (\frac{2}{6})^2 = (\frac{2}{6})^2 + \frac{5}{3} \Rightarrow (x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} + \frac{5}{3}$$

$$(x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1+15}{9} \Rightarrow (x - \frac{1}{3})^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow (x - \frac{1}{3}) = \pm \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \pm \frac{4}{3}$$

$$x_1 = \frac{5}{3} , \quad x_2 = -\frac{3}{3} = -1$$

معادلات ذیل را به روش تکمیل مربع حل نمایید.

1) $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = -5 + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4 \Rightarrow (x-3)^2 = 4 \Rightarrow (x-3)^2 = 2^2 \Rightarrow x-3 = \mp 2 \Rightarrow \begin{cases} x-3=2 \Rightarrow x=5 \\ x-3=-2 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

2) $2x^2 + 6x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = -\frac{1}{2} \Rightarrow (x^2 + 3x + 9/4) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow (x^2 + 3x + 9/4) = 7/4 \Rightarrow (x + 3/2)^2 = \mp \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3/2 = \sqrt{7}/2 \Rightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \\ x + 3/2 = -\sqrt{7}/2 \Rightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

$$3) \quad x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x = 9 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 9 + 16$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 25 \Rightarrow (x-4) = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x-4=5 \Rightarrow x=9 \\ x-4=-5 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$4) \quad 2x^2 + 9x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 9/2 x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 9/2 x = -2 \Rightarrow x^2 + 9/2 x + 81/16 = -2 + 81/16$$

$$\Rightarrow (x+9/4)^2 = \frac{-32+81}{16} \Rightarrow (x+9/4)^2 = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow (x+9/4) = \pm \frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{9}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ x + \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

$$5) \quad 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow (x+3/4)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow (x+3/4)^2 = (1/4)^2 \Rightarrow (x+3/4) = \pm \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$6) \quad 6x^2 + 11x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{10}{6} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{11}{6}x = \frac{10}{6} \Rightarrow x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{121}{144} = \frac{10}{6} + \frac{121}{144}$$

$$\Rightarrow (x+11/12)^2 = \frac{240+121}{144} \Rightarrow (x+11/12)^2 = \frac{361}{144}$$

$$\Rightarrow (x+11/12)^2 = \left(\frac{19}{12}\right)^2 \Rightarrow x + \frac{11}{12} = \pm \frac{19}{12} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{11}{12} = \frac{19}{12} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ x + \frac{11}{12} = -\frac{19}{12} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$7) \quad 6x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{6}x = \frac{1}{6} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{144} = \frac{1}{6} + \frac{1}{144} = \frac{25}{144}$$

$$\Rightarrow (x - 1/12)^2 = (5/12)^2 \Rightarrow (x - 1/12) = \mp \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{12} = -\frac{5}{12} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$8) \quad 8x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{6}{8}x + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{4}x = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = -\frac{1}{8} + \frac{9}{64} \Rightarrow (x + 3/8)^2 = \frac{1}{64}$$

$$(x + 3/8)^2 = (1/8)^2 \Rightarrow x + \frac{3}{8} = \mp \frac{1}{8} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{8} = +\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \\ x + \frac{3}{8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$9) \quad 3x^2 + 8x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{8}{3}x = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} = -\frac{5}{3} + \frac{16}{9} = \frac{-15 + 16}{9}$$

$$\Rightarrow (x + 4/3)^2 = (1/3)^2 \Rightarrow (x + 4/3) = \mp \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \\ x + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$10) \quad 6x^2 - 19x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 19/6x + 15/6 = 0 \Rightarrow x^2 - 19/6x = -15/6$$

$$\Rightarrow (x^2 - 19/6x + 361/144) = -\frac{15}{6} + \frac{361}{144} = \frac{1}{144}$$

$$\Rightarrow (x - 19/12)^2 = (1/12)^2 \Rightarrow x - \frac{19}{12} = \mp \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{19}{12} = \frac{1}{12} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ x - \frac{19}{12} = -\frac{1}{12} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$11) \quad x^2 + 6x + 25 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = -25 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = -25 + 9$$

$$\Rightarrow (x + 3)^2 = -16 < 0 \quad \text{غیر ممکن است}$$

حل معادلات با استفاده از فورمول محمد بن موسی خوارزمی :

برای دریافت فورمول، مراحل تکمیل مربع را با در نظر داشت شکل عمومی این معادلات انجام می‌دهیم.

$$(ax^2 + bx + c) / a = 0 / a \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{b}{2a} \Rightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اگر $b^2 - 4ac$ را با Δ (دلتا) نشان دهیم فورمول شکل ذیل را بخود می‌گیرد.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

معادله نظر به قیمت Δ سه حالت ذیل را دارد :

1- هر گاه $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو جذر حقیقی بوده و گراف آن محور x را در دو نقطه قطع می‌کند.

2- هر گاه $\Delta = 0$ باشد هر دو جذر معادله با هم مساوی و توسط رابطه $-\frac{b}{2a}$ حاصل می‌گردد. در این

صورت گراف محور x را در یک نقطه قطع می‌کند (با محور x مماس است).

3- هر گاه $\Delta < 0$ باشد معادله دارای جذور حقیقی نیست بلکه جذور آن موهومی می‌باشد و گراف آن محور x را قطع نمی‌کند.

مثال : جذور معادله $x^2 - 8x + 15 = 0$ را بدست آورید.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(15) \Rightarrow \Delta = 64 - 60 = 4 \quad \text{حل :}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{2(1)} \Rightarrow x_1 = \frac{8 + 2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{2(1)} \Rightarrow x_2 = \frac{8 - 2}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

جذور معادلات ذیل را با استفاده از فرمول محمد بن موسی خوارزمی دریافت کنید.

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-4) \Rightarrow \Delta = 4 + 16 = 20$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5}$$

2) $x^2 + 8x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (8)^2 - 4(1)(-7)$$

$$\Delta = 64 + 28 = 92$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{92}}{2} = \frac{-8 + 2\sqrt{23}}{2} = -4 + \sqrt{23}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{92}}{2} = \frac{-8 - 2\sqrt{23}}{2} = -4 - \sqrt{23}$$

3) $3x^2 + x - 14 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (1)^2 - 4(3)(-14)$$

$$\Delta = 1 + 12(14) = 169$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 13}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 13}{6} = \frac{-14}{6} = \frac{-7}{3}$$

4) $3x^2 + 5x - 8 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (5)^2 - 4(3)(-8)$$

$$\Delta = 25 + 12(8)$$

$$\Delta = 121$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{121}}{6} = \frac{-5 + 11}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{121}}{6} = \frac{-5 - 11}{6} = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}$$

5) $x^2 + 10x + 24 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (10)^2 - 4(1)(24)$$

$$\Delta = 100 - 96 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + 2}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - 2}{2} = -6$$

6) $4x^2 + x - 5 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (1)^2 - 4(4)(-5)$$

$$\Delta = 1 + 16 \times 5$$

$$\Delta = 81$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{81}}{8} = \frac{-1 + 9}{8} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{81}}{8} = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4}$$

7) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (5)^2 - 4(2)(-3)$$

$$\Delta = 25 + 24$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{4} = -3$$

8) $3x^2 + 5x + 2 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (5)^2 - 4(3)(2)$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{1}}{6} = \frac{-5 + 1}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{1}}{6} = \frac{-5 - 1}{6} = -1$$

9) $2x^2 + 9x + 4 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (9)^2 - 4(2)(4)$$

$$\Delta = 81 - 32 = 49$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{49}}{4} = \frac{-9 + 7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{49}}{4} = \frac{-9 - 7}{4} = -4$$

10) $12x^2 - 17x + 6 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-17)^2 - 4(12)(6)$$

$$\Delta = 289 - 288$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+17 + \sqrt{1}}{24} = \frac{+17 + 1}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+17 - \sqrt{1}}{24} = \frac{+17 - 1}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

بیشتر بدانید!

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر b جفت باشد بهتر است که از روش Δ' نماییم یعنی:

$$b' = \frac{b}{2}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

$$x' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, \quad x'' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

مثال: جذور معادله $3x^2 + 8x - 35 = 0$ را دریافت کنید.

$$\begin{cases} a = 3 \\ b' = \frac{b}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \Delta' = b'^2 - ac \\ c = -35 \end{cases} \quad \Delta' = 16 - (3)(-35) = 121$$

$$x' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-4 + \sqrt{121}}{3} = \frac{-4 + 11}{3} = \frac{7}{3}$$

$$x'' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-4 - 11}{3} = -5$$

1- هرگاه $\Delta' > 0$ باشد معادله دارای دو جذر حقیقی خواهد بود.

2- هرگاه $\Delta' = 0$ باشد دو جذر معادله با هم مساوی و از رابطه $x' = x'' = \frac{-b'}{a}$ دریافت می‌شود.

3- هرگاه $\Delta' < 0$ باشد معادله دارای جذور حقیقی نمی‌باشد.

بیشتر بدانید!

معادله درجه سوم: شکل عمومی معادله درجه سوم عبارت است از $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

حالت‌های خاص

1- اگر $d = 0$ باشد معادله به شکل $x(ax^2 + bx + c) = 0$ در می‌آید که یک جواب آن صفر بوده و جواب‌های دیگر از حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ حاصل می‌شود.

2- اگر $a + b + c + d = 0$ باشد یک جواب معادله یک می‌باشد و برای دریافت جواب‌های دیگر معادله را بر $x - 1$ تقسیم کرده و خارج قسمت را برابر به صفر قرار می‌دهیم.

مثال: جوابهای معادله $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$ را دریافت کنید؟

$$9 - 1 - 7 + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - x^2 - 7x + 6 & x - 1 \\
 \hline
 -2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + x - 6 \\
 \hline
 x^2 - 7x & \\
 -x^2 + x & \\
 \hline
 -6x + 6 & \\
 -6x + 6 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^3 - x^2 - 7x + 6 = (x-1)(2x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x = 3/2$$

$$x = 1$$

3- اگر $a + c = b + d$ یکی از جوابهای معادله (-1) می باشد و برای دریافت جوابهای دیگر معادله را بر $x+1$ تقسیم نموده و خارج قسمت را مساوی به صفر قرار می دهیم.

مثال: جوابهای معادله $2x^3 - x^2 + 3x + 6 = 0$ را دریافت کنید.

$$2 + 3 = -1 + 6 \Rightarrow x = -1$$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - x^2 + 3x + 6 & x + 1 \\
 \hline
 -2x^3 + 2x^2 & 2x^2 - 3x + 6 \\
 \hline
 -3x^2 + 3x & \\
 +3x^2 + 3x & \\
 \hline
 6x + 6 & \\
 -6x + 6 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

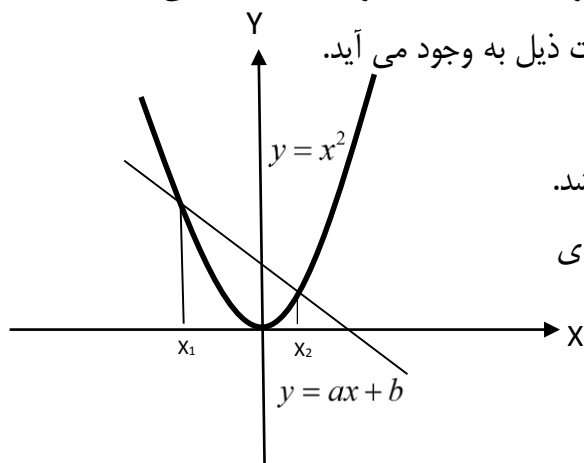
$$\Rightarrow 2x^3 - x^2 + 3x + 6 = (x+1)(2x^2 - 3x + 6) = 0$$

$$2x^2 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2)(6) = 9 - 48 = -39 < 0$$

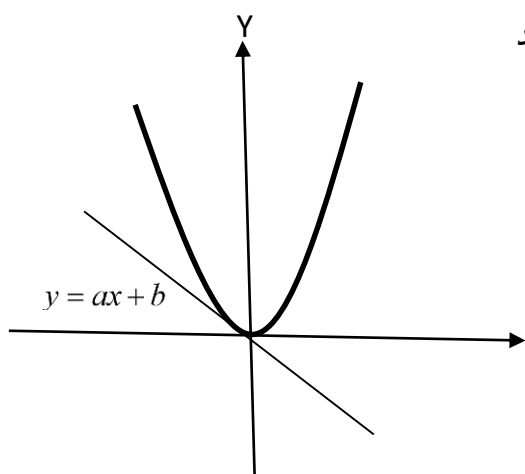
جواب حقیقی ندارد. بناءً معادله فوق فقط یک جواب حقیقی دارد. $(x = -1)$

حل معادلات به طریق گراف و یا هندسی :

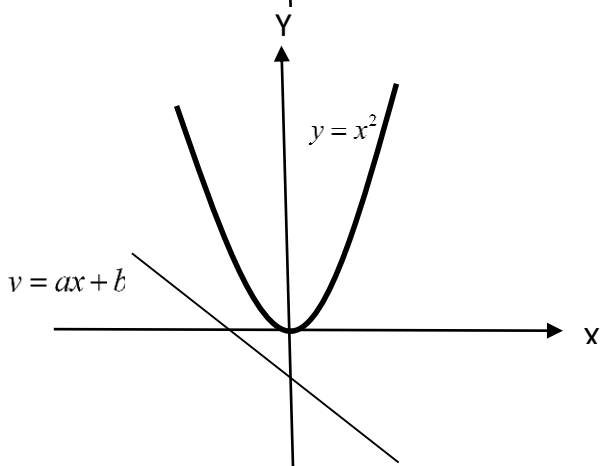
هر معادله درجه دومی را میتوانیم به حیث ترکیب مساوات و معادلات $y=x^2$ و یک معادله خطی $y=ax+b$ بنویسیم بعد از ترسیم گراف $y=x^2$ و $y=ax+b$ سه حالت ذیل به وجود می آید.



1- در صورتیکه این دو گراف دو نقطه تقاطع داشته باشد.
پس معادله $ax^2+bx+c=0$ دو جذر داشته و x های
نقاط تقاطع دو گراف حل معادله میباشد.



2- در صورتیکه این دو گراف یک نقطه مماس داشته باشد
پس معادله $ax^2+bx+c=0$ یک حل داشته
و آن x نقطه تماس می باشد.

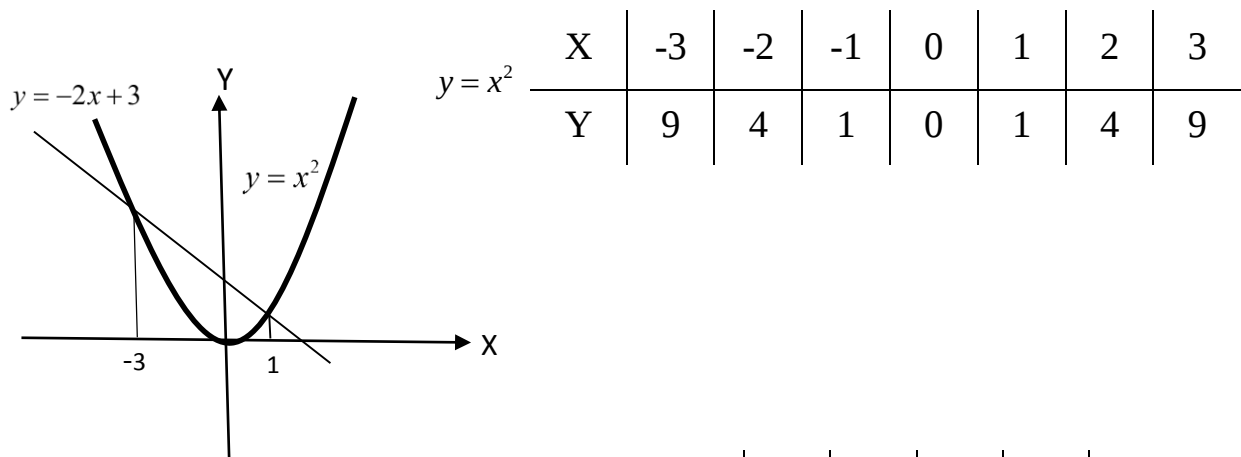


3- در صورتیکه آن دو گراف هیچ نقطه تقاطع نداشته باشد
پس معادله هیچ حل ندارد (جذور آن موهومی است).

مثال : حل معادله $x^2+2x-3=0$ را به روش هندسی دریابید.

حل : معادله $x^2+2x-3=0$ را میتوانیم به شکل زیر بنویسیم و گراف آنرا ترسیم مینمائیم.

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x^2=-2x+3 \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ y=-2x+3 \end{cases}$$



$y = -2x + 3$	X	-3	-2	-1	0	1
	Y	9	7	5	3	1

دیده میشود که دو تابع $y = x^2$ و $y = -2x + 3$ در دو نقطه $x_1 = -3$ و $x_2 = 1$ یک دیگر را قطع نموده اند پس جذور معادله بوده میتواند.

مثال : معادلات ذیل را حل نمائید.

1) $x^2 - 5x = 0$

$$x(x-5) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = 5$$

2) $6x^2 + x - 12 = 0$

$$(2x+3)(3x-4) = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ or } x = \frac{4}{3}$$

3) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$(3x-1)^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

مثال : معادله $3x^2 + x - 10 = 0$ را با استفاده از طریقه تکمیل مربع حل نمائید؟

حل : در معادله $3x^2 + x - 10 = 0$ ما داریم که : $a = 1$, $b = 1$ و $c = -10$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{121}}{6} = \frac{-1 - 11}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-1 + 11}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$S = \left\{ -2, \frac{5}{3} \right\}$$

مثال : معادله $6x^2 - 5x = 0$ را با استفاده از روش تکمیل مربع حل نمائید؟

حل : برای معادله $6x^2 - 5x = 0$ داریم که : $a = 6$, $b = -5$ و $c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 0}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{5 \pm 5}{12}$$

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad \text{و} \quad S = \left\{ -2, \frac{5}{3} \right\}$$

رابطه بین جذور و ضرایب معادله درجه دوم :

روابط زیادی از قبیل : حاصل جمع ، حاصل تفریق ، حاصل ضرب ، حاصل تقسیم ، حاصل جمع مربعات و یا مکعبات و ... بین ضرایب (a ، b ، c) و جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ موجود است.

در جدول ذیل بعضی از این روابط مشاهده میگردد.

روابط بین ضرایب و جذور معادله :

$x_1 + x_2$	$-\frac{b}{a}$	$x_1^2 + x_2^2$	$\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$
$x_1 \cdot x_2$	$\frac{c}{a}$	$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$	$\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$
$x_1 \div x_2$	$\frac{b - \sqrt{\Delta}}{b + \sqrt{\Delta}}$	$x_1^3 + x_2^3$	$\frac{3abc - b^3}{c^3}$
$ x_1 - x_2 $	$\frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$	$x_1^4 + x_2^4$	$\frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$
$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2}$	$\frac{a}{c}$	$(x_1 + x_2)^3$	$\left(-\frac{b}{a}\right)^3 = -\frac{b^3}{a^3}$
$\frac{1}{x_1} \div \frac{1}{x_2}$	$\frac{b + \sqrt{\Delta}}{b - \sqrt{\Delta}}$	$x_1^2 - x_2^2$	$\frac{-b\sqrt{\Delta}}{a^2}$
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	$-\frac{b}{c}$	$x_1^4 - x_2^4$	$\frac{-b^3\sqrt{\Delta} + 2abc\sqrt{\Delta}}{a^4}$
$\left \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right $	$\frac{\sqrt{\Delta}}{ c }$	$(x_1 + x_2)^2$	$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$

بعضی از این روابط با در نظر داشت قیمت های x_1 و x_2 قابل ثبوت و دریافت می باشد.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

ثبوت :

$$\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

حاصل جمع جذور را به S نشان میدهند .

ثبوت :

$$\begin{aligned} \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) &= \frac{b^2 + \cancel{b}\sqrt{\Delta} - \cancel{b}\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

حاصل ضرب جذور را به p نشان میدهند.

ثبوت :

$$\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{-\cancel{b}+\sqrt{\Delta}+\cancel{b}+\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

بعضی از این روابط با استفاده از روابط قبلی قابل دریافت می باشد.

$$x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p$$

ثبوت :

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p$$

$$x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3ps$$

ثبوت :

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = s^3 - 3ps$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

ثبوت :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a}{c}$$

$$x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

تشکیل معادله درجه دوم با داشتن جذور

در صورتیکه x_1 و x_2 جذور یک معادله درجه دوم باشند برای تشکیل و دریافت معادله آن میتوان از یکی از دو رابطه ذیل استفاده نمود.

$$1: (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - sx + p = 0 \quad 2: x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

که رابطه دوم با استفاده از شکل عمومی معادله درجه دوم نیز قابل دریافت میباشد.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

اطراف را به a تقسیم می نمائیم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

سپس افاده $\frac{b}{a}x$ را به صورت $-\left(-\frac{b}{a}x\right)$ تبدیل و از روابط حاصل جمع و حاصل ضرب استفاده می نمائیم.

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - sx + p = 0$$

بیشتر بدانید!

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر ضرایب ناطق باشند و یکی از جذور $p + \sqrt{q}$ باشد جذر دیگر $p - \sqrt{q}$ خواهد بود.

مثال: در معادله $x^2 - 4x - 1 = 0$ یک جذر $2 + \sqrt{5}$ می باشد. بناءً جذر دیگر $2 - \sqrt{5}$ خواهد بود.

مثال: معادله درجه دومی را بنویسید که جذور آن $\begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$ باشد.

حل:

$$s = 1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 2, \quad p = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$$

$$x^2 - sx + p = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

مثال : معادله ای را بنویسید که جذور آن $x_1 = -3$ و $x_2 = 4$ باشد.

حل : برای حل سوال فوق از فارمول اول استفاده می نمائیم.

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

با وضع قیمت های x_1 و x_2 و انجام عملیه ضرب و ساده سازی معادله بدست می آید.

$$(x + 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

مثال : معادله ای را بنویسید که حاصل جمع جذور آن -3 و حاصل ضرب جذور آن 2 باشد.

$$x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

حل :

بیشتر بدانید!

اگر جذور معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو عدد مسلسل باشند آنگاه:

$$1) \quad \Delta = a^2$$

$$2) \quad x' = \frac{-(a+b)}{2a}$$

مثال: اگر معادله $x^2 - mx + 2 = 0$ دارای دو جذر مسلسل باشد m را دریافت کنید.

$$\Delta = a^2 \Rightarrow b^2 - 4ac = a^2$$

$$\Rightarrow (-m)^2 - 4(1)(2) = 1$$

$$-m^2 - 8 = 1 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \mp 3$$

نکات مهم در معادلات درجه دوم

1- اگر مجموع ضرایب مساوی به صفر باشد ($a+b+c=0$) یک جذر معادله یک و جذر دیگر آن $\frac{c}{a}$ می باشد.

سوال : جذور معادله $x^2 - (1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ را بدست آورید. حل : از آنجا که مجموع ضرایب صفر است

پس یک جذر معادله 1 می باشد و با استفاده از رابطه $\frac{c}{a}$ جذر دوم $\sqrt{3}$ حاصل می گردد.

2- اگر در یک معادله رابطه $a+c=b$ موجود باشد یک جذر معادله -1 بوده و جذر دیگر آن توسط

فارمول $-\frac{c}{a}$ بدست می آید.

سوال : جذور معادله $2x^2 + 7x + 5 = 0$ را بدست آورید.

حل : از آنجا که رابطه $a + c = b$ بین ضرایب این معادله برقرار است. پس یک جذر معادله -1 می باشد و

با استفاده از رابطه $-\frac{c}{a}$ جذر دوم $-\frac{5}{2}$ بدست می آید.

3- اگر دو معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و $a'x^2 + b'x + c' = 0$ دارای دو جذر مشترک باشند باید

رابطه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در آن صدق نماید.

4- اگر در معادله درجه دوم a به طرف صفر نزدیک گردد یکی از جذرها به طرف ∞ و جذر دیگر به

طرف $-\frac{c}{a}$ نزدیک میشود.

بر علاوه اگر هر دو ضریب a و b به طرف صفر نزدیک شود هر دو جذر به طرف ∞ نزدیک میشود.

سوال : در چه صورت هر دو جذر معادله $(3a - b - 1)x^2 + (2a + b - 4)x + a - 3 = 0$ به طرف ∞ نزدیک میشود.

حل : باید ضریب x^2 و x به صفر نزدیک شود یعنی :

$$\begin{cases} 3a - b - 1 = 0 \\ 2a + b - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow a \rightarrow 1 \quad b \rightarrow 2$$

حل معادلات که قابلیت تبدیل به درجه دو را دارند

به صورت عمومی هر گاه یک معادله درجه دوم نباشد و ما بتوانیم با تغییر متحول آنرا به شکل معادله درجه

دوم تبدیل کنیم معادله اولی را معادله قابل تبدیل به معادله درجه دوم می نامند. معادلاتی به معادله درجه

دوم تبدیل می شود که در جه حد وسط نصف درجه حد اول باشد و نیز معمولاً حد وسط یک متحول جدید

فرض میشود و حد اول نظر به این متحول جدید درجه دو میشود.

بعضی از این معادلات و حل آن قرار ذیل می باشد.

$$1) \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad (x^2)^2 - 13(x^2) + 36 = 0 \Rightarrow x^2 = p \Rightarrow p^2 - 13p + 36 = 0$$

که بعد از حل معادله آخر قیمت $\begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = 9 \end{cases}$ حاصل می گردد و برای دریافت قیمت های x از رابطه

$x^2 = p$ استفاده می نمائیم.

$$x^2 = p \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

$$2) \quad x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$$

حل : روش اول :

$$x = y^2 \Rightarrow y^2 - 5\sqrt{y^2} + 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$$

که از حل معادله آخری قیمت های y بدست می آید و برای دریافت قیمت های x از رابطه $x = y^2$ استفاده می گردد.

$$x = y^2 \Rightarrow x_1 = 2^2 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow x_2 = 3^2 \Rightarrow x_2 = 9$$

روش دوم :

$$\begin{aligned} x - 5\sqrt{x} + 6 &= 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = p \\ p^2 - 5p + 6 &= 0 \Rightarrow p = 2, p = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 2, x = 4 \\ \sqrt{x} &= 3, x = 9 \end{aligned}$$

$$3) \quad x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 3 = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = p \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^2 - 4(x^{\frac{1}{3}}) + 3 = 0 \Rightarrow p^2 - 4p + 3 = 0$$

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = p^3 \Rightarrow x_1 = 1^3 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 3^3 \Rightarrow x_2 = 27$$

$$4) \quad x^2 + 4x - 6 = 2\sqrt{x^2 + 4x - 3}$$

ابتدا $x^2 + 4x - 6$ را به صورت $x^2 + 4x - 3 - 3$ نوشته و $x^2 + 4x - 3$ را با p^2 تعویض می نماییم.

$$x^2 + 4x - 3 - 3 = 2\sqrt{x^2 + 4x - 3} \Rightarrow x^2 + 4x - 3 = p^2 \Rightarrow p^2 - 3 = 2\sqrt{p^2}$$

$$p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 3 \\ p_2 = -1 \end{cases}$$

از دو قیمت بدست آمده برای p تنها 3 قابل قبول است در نتیجه x :

$$x^2 + 4x - 3 = p^2 \Rightarrow x^2 + 4x - 3 = 9 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

که هر دو قیمت بدست آمده قابل قبول است.

$$5) \quad x^{\frac{4}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} - 36 = 0$$

ابتدا $x^{\frac{4}{3}}$ را به صورت $(x^{\frac{2}{3}})^2$ نوشته و $x^{\frac{2}{3}}$ را با p تعویض می نماییم.

$$(x^{\frac{2}{3}})^2 - 5(x^{\frac{2}{3}}) - 36 = 0 \Rightarrow p = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow p^2 - 5p - 36 = 0$$

که بعد از حل معادله آخر قیمت های p عبارت اند از : $\begin{cases} p_1 = 9 \\ p_2 = -4 \end{cases}$ بناء برای دریافت x با توجه به رابطه

$$x^{\frac{2}{3}} = p \text{ خواهیم داشت.}$$

$$x^{\frac{2}{3}} = p \Rightarrow x = p^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 9^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 27$$

$$x = (-4)^{\frac{3}{2}} \quad \text{غ ق ق}$$

$$6) \quad 2^{2x} - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$$

جهت تبدیل این معادله به معادله درجه دوم با استفاده از قوانین توان افاده 2^{x+1} را به صورت $2^x \cdot 2$ تبدیل و 2^x را به P تعویض می نماییم.

$$(2^x)^2 - 5(2^x)2 + 16 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 10(2^x) + 16 = 0 \Rightarrow 2^x = p$$

$$p^2 - 10p + 16 = 0$$

که قیمت های p در معادله اخیر 8 و 2 می باشد. با استفاده از رابطه $2^x = p$ قیمت های x ، 3 و 1 بدست می آید.

$$2^x = p \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x_2 = 1$$

معادلات پارامتریک

معادلاتی را گویند که علاوه بر مجهول اصلی $(x, y, z, \dots)$ دارای یک و یا چند مجهول فرعی $(m, n, k, \dots)$ می باشند طوریکه مجهول اصلی قیمت هایش وابسته به قیمت مجهول های فرعی است.
نکته : در معادلات پارامتریک به مجهولات فرعی پارامتر های معادله پارامتریک نیز می گویند.
حل معادلات پارامتریک :

هدف از حل یک معادله پارامتریک دریافت قیمت برای مجهول های فرعی $(m, n, p, \dots)$ می باشد. در معادلات پارامتریک برای جذور مجهول اصلی شرط وضع می شود و از ما خواسته می شود تا قیمت مجهولات فرعی را طوری تعیین نماییم تا شرط مسئله برای جذور اصلی بر آورده شود.

نکته : در معادلات یک مجهوله درجه 2 پارامتریک قیمت های a, b, c را همراه مجهول فرعی (پارامتر) تعیین می نماییم.

$$1) \quad 3mx^2 + 4x + 5m = 0 \Rightarrow a = 3m, \quad b = 4, \quad c = 5m$$

$$2) \quad x^2 - (7m + 4)x - 7p = 0 \Rightarrow a = 1, \quad b = -(7m + 4), \quad c = -7p$$

$$3) \quad mx^2 - 15mx + 4p + 7 = 0 \Rightarrow a = m, \quad b = -15m, \quad c = 4p + 7$$

نکته : در حل معادلات پارامتریک با توجه به شرط معادله باید برای مجهول فرعی یک معادله تشکیل دهیم.

چند نکته مهم در حل معادلات یک مجهوله درجه دوم پارامتریک

1) اگر در معادله پارامتریک مجموع جذور داده شود برای دریافت قیمت پارامتر مورد نظر $(-\frac{b}{a})$ را برابر عدد مورد نظر قرار می دهیم.

2) اگر تفاضل جذور داده شود برای دریافت پارامتر مورد نظر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ را برابر عدد مذکور قرار می دهیم.

3) در صورتیکه جذور یکسان خواسته شود برای دریافت پارامتر (مجهول فرعی) دلتا (Δ) را برابر صفر قرار می دهیم.

4) در صورتیکه جذور حقیقی و مختلف خواسته شود دلتا را بزرگتر از صفر قرار می دهیم.

5) اگر در معادله پارامتریک جذور حقیقی خواسته شود برای دریافت پارامتر دلتا (Δ) را بزرگتر از صفر قرار می دهیم.

6) اگر در معادله پارامتریک جذور موهومی خواسته شود دلتا (Δ) را کوچکتر از صفر قرار می دهیم.

7) در صورتیکه مجموع مربعات و یا مکعبات جذور داده شود برای دریافت پارامتر $s^2 - 2p$ و یا $s^3 - 3ps$ را برابر اعداد داده شده قرار می دهیم.

8) اگر در معادله پارامتریک جذور معکوس خواسته شود حاصل ضرب جذور $(\frac{c}{a})$ را برابر یک قرار می دهیم.

9) اگر جذور برابر و مختلف اشاره خواسته شود حاصل جمع جذور $(-\frac{b}{a})$ را برابر صفر قرار می دهیم.

10) در صورتیکه یکی از جذور معادله داده شود برای دریافت قیمت پارامتر قیمت جذر را در معادله وضع نموده یک معادله از جنس پارامتر تشکیل می شود و با حل آن قیمت پارامتر حاصل می شود.

11) در صورتیکه جذور معادله پارامتریک هم اشاره خواسته شود حاصل ضرب جذور $(\frac{c}{a})$ را بزرگتر از صفر قرار می دهیم.

12) در صورتیکه جذور معادله پارامتریک مختلف اشاره خواسته شود حاصل ضرب جذور $(\frac{c}{a})$ را کوچکتر از صفر قرار می دهیم.

13) نکات فوق میتواند راهنمایی برای حل معادلات پارامتریک باشد اما در حالت کلی برای حل معادلات پارامتریک باید کوشش نمائیم تا با توجه به شرط معادله برای پارامتر (مجهول فرعی) یک معادله تشکیل داده با حل آن قیمت مجهول فرعی (پارامتر) را حاصل نمائیم.

مثال : در معادله $x^2 + 7x + m = 7$ قیمت m را طوری تعیین نمائید تا حاصل ضرب جذور عدد 10 شود؟
حل :

$$x^2 + 7x + m = 7 ; \quad x_1 \cdot x_2 = 10$$

$$x^2 + 7x + m = 7 ; \quad x_1 \cdot x_2 = 10 \Rightarrow \frac{c}{a} = 10 \Rightarrow \frac{m-7}{1} = 10 \Rightarrow m = 17$$

مثال : در معادله $x(2-x)+m+1=0$ قیمت m را طوری دریافت نمائید تا جذور معادله همراه یکدیگر برابر شود؟

حل :

$$x(2-x)+m+1=0 \Rightarrow -x^2+2x+m+1=0 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \Delta=0$$

$$b^2-4ac=0 \Rightarrow (2)^2-4(-1)(m+1)=0 \Rightarrow 4+4(m+1)=0$$

$$4m+8=0 \Rightarrow m=-2$$

مثال : در معادله $x+2+\frac{m+2}{x-2}=1$ قیمت m را طوری تعیین نمائید تا حال ضرب جذور عدد 2 شود؟

حل :

$$\frac{x+2}{1}+\frac{m+2}{x-2}=1 \Rightarrow \frac{x^2-4+m+2}{x-2}=1 \Rightarrow \frac{x^2+m-2}{x-2}=1$$

$$x^2+m-2=x-2 \Rightarrow x^2-x+m=0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2=2 \Rightarrow \frac{c}{a}=2$$

$$\frac{m}{1}=2 \Rightarrow m=2$$

مثال : در معادله پارامتریک $x^2+(m-2)x+m=0$ قیمت m را طوری تعیین نمائید که $(x_1-1)(x_2-1)=1$

شود؟

حل :

$$(x_1-1)(x_2-1)=1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = 0$$

$$\frac{c}{a} - \left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \Rightarrow \frac{m}{1} - \left(-\frac{m-2}{1}\right) = 0 \Rightarrow m + m - 2 = 0$$

$$2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

مثال : معادله پارامتریک $x^2+(2m+4)x+m-9=0$ قیمت m را طوری تعیین نمائید تا یکی از جذور عدد 5

باشد؟

حل :

$$x^2+(2m+4)x+m-9=0; \quad x_1=5$$

$$(5)^2+(2m+4) \cdot 5+m-9=0 \Rightarrow 25-10m+20+m-9=0$$

$$-9m+36=0 \Rightarrow m=4$$

مثال : در معادله پارامتریک $3x^2-2kx+12=0$ قیمت k را طوری تعیین نمائید تا جذور معادله با یکدیگر برابر

شود؟

حل :

$$3x^2-2kx+12=0 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \Delta=0$$

$$(-2k)^2-4(3)(12)=0 \Rightarrow 4k^2-144=0 \Rightarrow k=\pm 6$$

مثال : در معادله پارامتریک $x^2 - 3x + m - 2 = 0$ قیمت m را طوری تعیین نمائید تا رابطه $x_1^2 - x_2^2 = 6$ صدق کند؟

حل :

$$x^2 - 3x + m - 2 = 0 ; \quad x_1^2 - x_2^2 = 6 ;$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 6 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) = 6 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{(-3)^2 - 4(1)(m-2)}}{1}\right)\left(-\frac{-3}{1}\right) = 6$$

$$\sqrt{9 - 4m + 8} \cdot 3 = 6 \Rightarrow \sqrt{-4m + 17} = 2 \Rightarrow -4m + 17 = 4 \Rightarrow m = \frac{13}{4}$$

مثال : در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ اگر یکی از جذور 2 واحد بزرگتر از دیگری باشد قیمت m کدام است؟

حل :

$$3x^2 - 15x + m = 0 ;$$

$$|x_2 - x_1| = 2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right) = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(-15)^2 - 4(3)(m)}}{|3|} = 2 \Rightarrow \sqrt{225 - 12m} = 6$$

$$225 - 12m = 36 \Rightarrow 12m = 225 - 36 \Rightarrow m = \frac{189}{12} = \frac{63}{4}$$

مثال : اگر -1 یک جذر برای $x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 3 = 0$ باشد پس قیمت m را بیابید؟

حل : ما قیمت -1 را به جای x در معادله وضع میکنیم.

$$(-1)^2 - 2m(-1) + m^2 - 3m - 3 = 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = -1 \text{ or } m = 2$$

مثال : در صورتیکه $x^2 - 2mx + 3 = 0$ و $x^2 + x - 6m = 0$ دارای یک جذر مشترک باشند قیمت m را

بیابید؟

حل : ابتدا یک معادله را از دیگری کم میکنیم.

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 6m = 0 \\ - \quad x^2 - 2mx + 3 = 0 \\ \hline (1+2m)x - 6m - 3 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{6m+3}{2m+1} = \frac{3(2m+1)}{1+2m} = 3$$

جذر معادله به شکل مقابل بدست آمده است :

اگر ما قیمت 3 را به جای x در معادله تعویض نمائیم داریم که :

$$9 + 3 - 6m = 0 \Rightarrow m = 2$$

مثال: اگر حاصل ضرب جذور معادله $(m+18)x^2 + 4x + m^2 = 0$ ، 3 باشد قیمت m را حاصل نمائید؟
حل:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2}{m+18} = 3 \Rightarrow m^2 = 3m + 54$$

$$m^2 - 3m - 54 = 0 \Rightarrow (m+6)(m-9) = 0$$

$$m = -6 \quad \text{or} \quad m = 9$$

مثال: اگر جذور معادله $2x^2 + 6x + 3 = 0$ ، x_1 و x_2 باشند داریم که:

$$1) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3 \quad 2) \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$3) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$$

$$4) \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-3)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 9 - 3 = 6$$

$$5) \quad |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{|2|} = \frac{\sqrt{36 - 24}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

بیشتر بدانید!

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر یک جذر k برابر جذر دیگر باشد رابطه ذیل بین ضرایب برقرار می‌باشد.

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

مثال: m را طوری دریافت کنید که یک جذر معادله $x^2 + mx + 2 = 0$ دو برابر جذر دیگر آن باشد.

$$\frac{m^2}{2} = \frac{(2+1)^2}{2}$$

$$\Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

حل : دارای یک تغییر علامت است بناءً یک جذر مثبت و یک جذر منفی دارد.

تشکیل معادلات یک مجهول درجه دو

برای تشکیل معادله جدید بر اساس یک معادله دیگر ابتدا مجهول معادله جدید را y در نظر گرفته بر اساس خواسته سوال قیمت y را از جنس مجهول گذشته (x) دریافت می نمایم پس از رابطه حاصله قیمت مجهول قدیم (x) را از جنس y دریافت نموده در معادله قدیم وضع نموده معادله خواسته شده از جنس y حاصل میشود با تبدیل مجدداً y به x معادله خواسته شده از جنس x حاصل میشود.

نکته : معادله درجه دومی تشکیل دهید که جذور آن متضاد جذور این معادله باشد.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$y = -x \quad x = -y$$

$$ay^2 - by + c = 0$$

$$ax^2 - bx + c = 0$$

مثلاً جذور دو معادله $2x^2 - 5x - 1 = 0$ و $2x^2 + 5x - 1 = 0$ متضاد هم اند.

مثال : معادله درجه سومی را تشکیل دهید که جذور آن متضاد جذور این معادله باشد.

$$2x^3 - 4x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$y = -x \Rightarrow x = -y$$

$$2(-y)^3 - 4(-y)^2 - 3(-y) - 7 = 0 \Rightarrow -3y^3 - 4y^2 + 3y - 7 = 0$$

$$-2x^3 - 4x^2 + 3x - 7 = 0$$

یعنی فقط علامت حدود با توانهای تاق عوض میشود.

نکته : معادله درجه دومی تشکیل دهید که جذور آن معکوس جذور معادله زیر باشد.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0 \Rightarrow cy^2 + by + a = 0$$

$$cx^2 + bx + a = 0$$

یعنی جای a و c عوض میشود.

مثال : معادله درجه سومی تشکیل دهید که جذور آن معکوس جذور این معادله باشد.

$$x^3 - 4x + 5 = 0$$

$$\frac{1}{x^3} - \frac{4}{x} + 5 = 0 \Rightarrow 5x^3 - 4x^2 + 1 = 0$$

بیشتر بدانید!

برای دریافت معادله‌ای که جذور آن k برابر جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد کفایت می‌کند که b را در k و c را در k^2 ضرب نماییم.

نکته : معادله درجه دومی تشکیل دهید که جذور آن k برابر جذور این معادله باشد.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$y = kx \quad x = \frac{y}{k}$$

$$a \frac{y^2}{k^2} + b \frac{y}{k} + c = 0 \Rightarrow ax^2 + b k x + c k^2 = 0$$

مثال : معادله درجه سومی را تشکیل دهید که جذور آن ثلث جذور این معادله باشد.

$$x^2 - 3x + 9 = 0 \quad k = \frac{1}{3}$$

$$x^2 - 3x \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

مثال : معادله درجه چهارمی تشکیل دهید که جذور هایش دو برابر جذور این معادله باشد.

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \quad k = 2$$

$$x^4 + 0 \cdot x^3 - x^2 + 0 \cdot x - 1 = 0$$

$$x^4 + 2 \cdot 0 \cdot x^3 - 4x^2 + 0 \cdot 8 \cdot x - 16 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 - 16 = 0$$

نکته : معادله درجه دومی تشکیل دهید که جذورش k واحد از جذور این معادله بیشتر باشد.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$y = x + k \quad y - k = x$$

$$a(y - k)^2 + b(y - k) + c = 0$$

$$a(x - k)^2 + b(x - k) + c = 0$$

مثال : معادله درجه سومی که جذور آن 2 واحد از جذور این معادله بیشتر باشد.

$$x^3 - 2x - 1 = 0$$

$$(x - 2)^3 - 2(x - 2) - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 10x - 5 = 0$$

نکته : معادله درجه دومی تشکیل دهید که جذور آن k واحد از جذور معادله زیر کمتر باشد.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a(x + k)^2 + b(x + k) + c = 0$$

مثال : معادله درجه دومی که جذور آن 2 واحد از متضاد جذور این معادله کمتر باشد.

$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$2(x+2)^2 - 3(x+2) - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 1 = 0$$

مثال : معادله درجه دوم تشکیل دهید که جذور آن مربع جذور این معادله باشد.

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$y - \sqrt{y} - 3 = 0 \Rightarrow y - 3 = \sqrt{y} \quad (y-3)^2 = y$$

$$y^2 - 6y + 9 - y = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 9 = 0$$

مثال : معادله درجه سومی تشکیل دهید که جذور آن مکعب جذور معادله زیر باشد.

$$x^3 - 2x - 1 = 0$$

$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$y - 2\sqrt[3]{y} - 1 = 0 \Rightarrow y - 1 = 2\sqrt[3]{y} \quad (y-1)^3 = 8y$$

$$y^3 - 3y^2 - 5y - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = 0$$

سوالات معادلات یک مجهوله درجه دوم

1. جذور معادله $x^2 - x - 20 = 0$ را دریافت کنید؟
 (A) $\{-4, 5\}$ (B) $\{-5, 4\}$ (C) $\{4, 5\}$ (D) $\{-4, -5\}$
2. جذور معادله $x^2 + 2x - 35 = 0$ را بدست آورید؟
 (A) $\{-4, 5\}$ (B) $\{-7, 5\}$ (C) $\{7, 5\}$ (D) $\{-5, 7\}$
3. مقدار x را از معادله $2x^2 - 5x + 3 = 0$ دریافت نمائید؟
 (A) $\left\{1, \frac{2}{3}\right\}$ (B) $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$ (C) $\left\{1, \frac{3}{2}\right\}$ (D) $\left\{2, \frac{1}{3}\right\}$
4. جذور معادله $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را دریافت کنید؟
 (A) $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$ (B) $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$ (C) $x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}$ (D) $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$
5. قیمت x را از معادله $x^3 - 9x = 0$ بدست آورید؟
 (A) $\{0, 3\}$ (B) $\{-3, 0\}$ (C) $\{-3, 3\}$ (D) $\{-3, 0, 3\}$
6. معادله $8x^6 - 35x^3 + 27 = 0$ را حل نمائید؟
 (A) $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$ (B) $\left\{4, \frac{3}{2}\right\}$ (C) $\left\{1, \frac{3}{2}\right\}$ (D) $\left\{\frac{5}{2}, 1\right\}$
7. حل معادله $\frac{2x^2 - 1}{x - 3} = x + 3 + \frac{17}{x - 3}$ کدام گزینه است؟
 (A) $\{-3\}$ (B) $\{+3\}$ (C) $\{-2\}$ (D) $\{-4\}$
8. کدام گزینه میتواند حل معادله $2\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 5\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 3$ باشد؟
 (A) $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ (B) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ (C) $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ (D) $\left\{+\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$
9. مقدار $x_1 + x_2$ را از معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ بدست آورید؟
 (A) $-3/2$ (B) $2/3$ (C) $3/2$ (D) $-3/2$
10. مقدار m را از معادله $x^2 + 7x + m = 7$ در صورتی بیابید که $x_1 \cdot x_2 = 10$ باشد؟
 (A) $m = 20$ (B) $m + 17$ (C) $m = 18$ (D) $m = 17$
11. از معادله $2x^2 - 7x + 3 = 0$ قیمت $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ را بدست آورید؟
 (A) $21/4$ (B) $4/21$ (C) $24/4$ (D) $-21/4$
12. در صورتی که $3x_1 + 4x_2 = 1$ باشد از معادله $2x^2 - 7x + m - 4 = 0$ مقدار m را حاصل نمائید؟
 (A) 324 (B) 233 (C) 243 (D) -243

13. مقدار x را از معادله $x^2 + 4 = 0$ حاصل نمایید؟
 (A) $\{R\}$ (B) $\{-4\}$ (C) هیچکدام (D) $\{-2\}$
14. مقدار m را در صورتی بیابید که هر دو جذر معادله $x \cdot (2 - x) + m + 1 = 0$ باهم مساوی باشد؟
 (A) $\{-2\}$ (B) $\{+3\}$ (C) $\{+2\}$ (D) $\{-4\}$
15. قیمت $x_1 + x_2$ را از معادله $2 \cdot (x - 3)^2 - (x - 3) = x - 3$ بدست آورید؟
 (A) 5 (B) 9 (C) 7 (D) 6
16. در صورتی که $x_1 \cdot x_2 = 2$ باشد مقدار m در معادله $x + 2 + \frac{m+2}{x-2} = 1$ چند است؟
 (A) 2 (B) 3 (C) 7 (D) 6
17. قیمت x را از معادله $\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = 0$ بدست آورید؟
 (A) $\{5\}$ (B) هیچکدام (C) $\{2\}$ (D) R
18. مقدار $x_1 + x_2$ را از معادله $3^x + \frac{1}{3^x} - \frac{10}{3} = 0$ بدست آورید؟
 (A) 5 (B) -2 (C) 0 (D) -1
19. در صورتیکه یکی از جذور معادله $x^2 + (2m - 4)x + m - 9 = 0$ مساوی به 5- باشد جذر دیگر آنرا بدست آورید.
 (A) -1 (B) -2 (C) 0 (D) 1
20. مقدار k را از معادله $3x^2 - 2kx + 12 = 0$ با در نظر داشت اینکه $x_1 = x_2$ است بدست آورید؟
 (A) 5 (B) 9 (C) 6 (D) 7
21. مقدار (x, y) را از سیستم معادلات $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x^2 - y^2 = 32 \end{cases}$ حاصل کنید؟
 (A) $(4, 0)$ (B) $(3, 2)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(5, -2)$
22. جذور معادله درجه دوم قرار ذیل داده شده است معادله مذکور کدام گزینه است؟
 $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ $x_2 = 1 + \sqrt{3}$
 (A) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (B) $x^2 - x - 2 = 0$ (C) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (D) $x^2 + 2x - 2 = 0$
23. مقدار m را از معادله $2x^2 - (m - 1)x - (4 - m) = 0$ در صورتی بیابید که یکی از جذور آن معکوس جذر دیگر آن باشد؟
 (A) $-3/2$ (B) 2 (C) 6 (D) 4

24. در صورتیکه $0 < x$ باشد مقدار x را از معادله $\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = 0$ بدست آورید؟

(A) $3/2$ (B) $1/3$ (C) $2/3$ (D) 1

25. در صورتیکه $x_1 + x_2 = 1$ باشد قیمت k را از معادله $2x^2 + kx - 3 = 0$ بدست آورید؟

(A) 2 (B) -2 (C) 3 (D) -1

26. مقدار b را از معادله $x^2 + (b-2)x + b$ نظر به شرط داده شده بدست آورید؟

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$$

(A) $-1/3$ (B) $-1/2$ (C) -1 (D) $1/2$

27. در صورتیکه $x \in Z$ باشد مقدار $m_1 + m_2$ را از معادله $(m+1)^{2x} = (9m^2 + 12m + 4)^x$ حاصل

نمائید؟

(A) $-5/4$ (B) $-3/2$ (C) -1 (D) $3/2$

28. مقدار a را در صورتی از معادله $a \cdot (x+1)^2 - x + 1 = 8$ بدست آورید که $x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{5}$

باشد؟

(A) 5 (B) 9 (C) 7 (D) 6

29. از معادله $\frac{1}{3^x+1} + \frac{8}{9^x-1} = \frac{1}{5}$ قیمت x را دریافت نمائید؟

(A) 5 (B) 0 (C) 2 (D) 6

30. مقدار a را در صورتی از معادله $x^2 - 2x + 8a = 0$ محاسبه کنید که $x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) = -48$

باشد؟

(A) -3 (B) 4 (C) 5 (D) -1

31. حاصل جمع جذور را از معادله $f(x) = x + \frac{2}{x} - 3$ در صورتی بیابید که $f(x_1) = f(x_2) = 0$

باشد؟

(A) -4 (B) 3 (C) -3 (D) 6

32. مقدار x را از معادله $2^{4x+1} - 2^{2x+2} = 96$ بدست آورید؟

(A) 1 (B) 2 (C) $5/2$ (D) $3/2$

33. حل معادله $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$ کدام گزینه است؟

(A) $\{4\}$ (B) $\{6\}$ (C) $\{8\}$ (D) $\{2\}$

34. جذور معادله $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$ را محاسبه کنید؟

(A) $\{-1, 0, 4\}$ (B) $\{+1, 0, 4\}$ (C) $\{-1, 0, -4\}$ (D) $\{-4, 0, 1\}$

35. جذور معادله $(2x-4)^2 = (3x+2)^2$ کدام گزینه است؟

(A) $\left\{\frac{2}{6}, -6\right\}$ (B) $\left\{\frac{2}{5}, -6\right\}$ (C) $\left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$ (D) $\left\{\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right\}$

36. در صورتیکه $\{2, m\}$ جذور معادله باشد مقدار m را از معادله $x^2 + 4x - 2m = 0$ بدست آورید؟

(A) -8 (B) 6 (C) -6 (D) -9

37. مقدار m را از معادله $x^2 - 2x + 6 + m = 0$ در صورتی بیابید که جذور آن با هم مساوی باشد؟

(A) -6 (B) 5 (C) -5 (D) -9

38. جذور معادله $\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2x+1}{x}\right) - 3 = 0$ را بدست آورید؟

(A) $\left\{-1, -\frac{1}{5}\right\}$ (B) $\{-1, 4\}$ (C) $\left\{-4, \frac{1}{5}\right\}$ (D) $\left\{-2, -\frac{1}{3}\right\}$

39. کدام گزینه حل معادله $(x+3)^4 + 2 \cdot (x+3)^2 - 3 = 0$ می باشد؟

(A) $\{-4, -2\}$ (B) $\{-1, 4\}$ (C) $\{-4, 2\}$ (D) $\{-4, -1\}$

40. اگر $\{m, n\}$ جذور معادله باشد مقدار $m+n$ را از معادله $x^2 + mx + n = 0$ بدست آورید؟

(A) 3 (B) -1 (C) $1/2$ (D) -2

41. مقدار a را از معادله $x^2 + 5x + a = 0$ در صورتی بدست آورید که $3x_1 - x_2 = 1$ و

x_1, x_2 جذور معادله باشد؟

(A) 6 (B) 4 (C) 3 (D) 2

42. در صورتیکه $2x_1 + 2x_2 + 3x_1 \cdot x_2 = 5$ باشد مقدار پارامتر m را از معادله

$x^2 + (m+2)x + (m-4) = 0$ بدست آورید؟

(A) 6 (B) 15 (C) 28 (D) 21

43. مقدار پارامتر m را در صورتی که $x_1 = 2x_2$ باشد از معادله $x^2 - 6x + m - 3 = 0$ دریافت

نمائید؟

(A) 5 (B) 11 (C) 7 (D) 6

45. معادله درجه دومی که یکی از جوابهای آن $3 - \sqrt{5}$ باشد کدام است؟

(1) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (3) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (4) $x^2 - 6x + 4 = 0$

46. در معادله درجه دوم $2\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}x - 1 = 0$ حاصل $x'^2 + x''^2$ برابر است با:

$$(1) \quad 9/4 \quad (2) \quad \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

47 مقدار پارامتر m را طوری دریافت کنید که معادله $(m^2+1)x^2 + (m^2-1)x + m^2 + 3m - 2 = 0$ دارای دو جذر متضاد باشد.

$$(1) \quad m=1 \quad (2) \quad m=1, 2 \quad (3) \quad m=-1 \quad (4) \quad m=\mp 1$$

48 اگر بین جذرهای معادله $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه $x' - x'' + x'x'' = 0$ برقرار باشد یکی از جذرهای آن برابر است با:

$$(1) \quad \frac{c+b}{2a} \quad (2) \quad \frac{c-b}{2a} \quad (3) \quad \frac{2a}{c-b} \quad (4) \quad \frac{c+b}{a}$$

49 اگر جذرهای معادله $x^2 + bx + c = 0$ دو عدد مسلسل باشند کدام رابطه برقرار می‌باشد.

$$(1) \quad b^2 + 4c = 1 \quad (2) \quad b^2 = 4c \quad (3) \quad b^2 - 4c = 1 \quad (4) \quad b^2 = c$$

50 معادله‌ای که جذرهای آن مکعب جذرهای معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ باشد کدام است؟

$$(1) \quad x^2 + 9x - 8 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 9x - 8 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 9x + 8 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 9x + 8 = 0$$

51 اگر x' و x'' جذرهای معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 9 = 0$ باشند معادله‌ای که جذرهای آن $x' + 2x''$ و $x'' + 2x'$ باشد کدام است؟

$$(1) \quad x^2 + 6x - 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 6x - 1 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 6x + 1 = 0 \quad (4) \quad \text{هیچکدام}$$

52 معادله‌ای که جذرهای آن $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ باشد کدام می‌باشد؟

$$(1) \quad x^2 + ax - 4 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 4x + a = 0 \quad (3) \quad x^2 - ax + 4 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 4x - a = 0$$

53 هرگاه جذرهای معادله $(a+b)x^2 - 6x + b = 0$ معکوس جذرهای معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند a و b کدام‌اند؟

$$(1) \quad \begin{matrix} a = -6 \\ b = -4 \end{matrix} \quad (2) \quad \begin{matrix} a = 6 \\ b = -4 \end{matrix} \quad (3) \quad \begin{matrix} a = -1 \\ b = 2 \end{matrix} \quad (4) \quad \begin{matrix} a = -2 \\ b = -4 \end{matrix}$$

54 برای کدام قیمت‌های a و b دو معادله $ax^2 + 2x + b = 0$ و $2x^2 + x - 1 = 0$ دارای دو جواب مشترک می‌باشند.

$$(1) \quad \begin{matrix} a = 6 \\ b = -4 \end{matrix} \quad (2) \quad \begin{matrix} a = -6 \\ b = -4 \end{matrix} \quad (3) \quad \begin{matrix} a = 4 \\ b = -2 \end{matrix} \quad (4) \quad \begin{matrix} a = -2 \\ b = -4 \end{matrix}$$

55) اگر x' و x'' جوابهای معادله $x^2 - 2x + m = 0$ باشند برای کدام مقدار m رابطه $\frac{1}{x'^3} + \frac{1}{x''^3} = 2$ برقرار می‌باشد.

- (1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) -2

56) اگر اعداد (-1) و (2) جوابهای معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند لازم است که:

- (1) $c - b = 1$ (2) $c + b = 1$ (3) $2b - c = 0$ (4) $2b + c = 1$

57) اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ جذرهای معادله $x^2 + px + 4 = 0$ باشند حاصل $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

- (1) $\frac{5}{p}$ (2) $\frac{p}{5}$ (3) $\frac{3}{p}$ (4) $\frac{p}{3}$

58) برای کدام قیمت m معادله $mx^2 + 5x + m^2 - 6 = 0$ دارای دو جذر معکوس می‌باشد؟

- (1) -3 (2) -2 (3) 2 (4) 3

59) در معادله $x^2 + bx + c = 0$ با شرط $b = c + 1$ یکی از جذرها برابر است با:

- (1) $-c$ (2) $2b - 1$ (3) $\frac{b}{2}$ (4) c

60) معادله‌ای که جذرهای آن معکوس جذرهای معادله $5x^2 - 13x - 1 = 0$ باشد کدام است؟

- (1) $-5x^2 + 13x + 1 = 0$ (2) $5x^2 + 13x - 1 = 0$ (3) $x^2 + 13x - 5 = 0$ (4) $x^2 - 13x + 5 = 0$

61) m را طوری دریافت کنید که معادله $(m+1)x^2 + m(m^2 - 9)x - 2 = 0$ دارای دو جذر مساوی و مختلف الاشاره باشد.

- (1) -1 (2) -3 (3) 3 (4) 9

62) در معادله $x^2 - ax - b^2 - ab = 0$ بین جذور کدام رابطه برقرار است؟

- (1) $\frac{x'}{x''} = \frac{a}{b} - 1$ (2) $\frac{x'}{x''} = \frac{a}{b} + 1$ (3) $\frac{x'}{x''} = -\left(1 + \frac{a}{b}\right)$ (4) $\frac{x'}{x''} = \frac{a}{a+b}$

63) در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ بین ضرایب رابطه $9a + 3b + c = 0$ برقرار می‌باشد یکی از جذور برابر است با:

- (1) $\frac{3c}{a}$ (2) -3 (3) $-\frac{b+3a}{a}$ (4) $\frac{2c}{3a}$

64) اگر $x^2 + 4x + 1 = 0$ باشد حاصل $(x+2)^4 + 1$ برابر است با:

- (1) 4 (2) 3 (3) 9 (4) 10

65) در معادله $x^2 - ax + a + 2 = 0$ تفاضل دو جذر برابر به 2 می باشد، a کدام است؟

- (1) $-2, 6$ (2) $2, -6$ (3) $-2, -6$ (4) $2, 6$

66) معادله درجه دومی که جذرهای آن 9 برابر جذرهای معادله $x^2 + x - 3 = 0$ باشد عبارت است از:

- (1) $x^2 + 3x - 4 = 0$ (2) $x^2 + 18x - 43 = 0$ (3) $x^2 + 9x - 243 = 0$ (4) $x^2 + 9x + 243 = 0$

67) مجموع جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با حاصل ضرب جذور آن بطور معکوس برابر است، کدام رابطه a و b برقرار است؟

- (1) $a^2 + bc = 0$ (2) $a^2 - bc = 0$ (3) $b^2 + ac = 0$ (4) $b^2 - ac = 0$

68) معادله ای که جذور آن از جذور معادله $x^2 + x - 1 = 0$ دو واحد کمتر باشد عبارت است از:

- (1) $x^2 + 5x - 5 = 0$ (2) $x^2 + 5x + 5 = 0$ (3) $x^2 - 5x + 5 = 0$ (4) $-x^2 + 5x - 5 = 0$

69) اگر a و b جذور معادله $(x+2)^2 + x + 1 = 0$ باشند حاصل $(a+2)^3 + (b+2)^3$ برابر است با:

- (1) 4 (2) 3 (3) -4 (4) -5

70) معادله ای که جذور آن هر یک مربع جذور معادله $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ باشند عبارت است از:

- (1) $x^2 + 5x - 6 = 0$ (2) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (3) $x^2 + 5x + \sqrt{6} = 0$ (4) $x^2 + 5x + 4 = 0$

71) معادله ای که جذور آن هر یک نصف جذور معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشد عبارت است از:

- (1) $x^2 - 3x + 4 = 0$ (2) $x^2 - 6x + 1 = 0$ (3) $x^2 - 6x + 2 = 0$ (4) $x^2 - 3x + 1 = 0$

72) اگر یکی از جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مساوی باشد به مربع معکوس جذر دیگر کدام رابطه درست است؟

- (1) $a^3 + b^3 - abc = 0$ (2) $a^3 - b^3 + abc = 0$ (3) $a^3 + b^3 + abc = 0$ (4) $a^3 - c^3 + abc = 0$

73) اگر به هر یک از جذور معادله $x^2 - x - 1 = 0$ یک واحد علاوه کنیم به حاصل ضرب آنها چقدر اضافه می شود؟

- (1) 3 (2) 2 (3) $1 + \sqrt{2}$ (4) 1

74) یکی از جذور معادله $121x^2 - 110x - 11 = 0$ عبارت است از:

- (1) $-\frac{1}{11}$ (2) $-\frac{2}{11}$ (3) $-\frac{3}{11}$ (4) $-\frac{4}{11}$

75) یکی از جذور معادله $(3m+1)x^2 + (2-3m)x - 3 = 0$ عبارت است از:

(1) $\frac{-3}{3m+1}$ (2) $\frac{4}{3m+1}$ (3) $\frac{2m+1}{3m+4}$ (4) $\frac{m}{m+1}$

76) اگر جذور معادله $2x^2 - 5x + m = 0$ عکس یکدیگر باشند قیمت m کدام است؟

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

77) در معادله $x^2 + 5x + 1 = 0$ قیمت عبارت $(x' + 1)(x'' + 1)$ برابر است با:

(1) 7 (2) -7 (3) 3 (4) -3

78) در صورتی که x' و x'' جذور معادله $x^2 + x - 1 = 0$ باشند قیمت $\frac{x'^3 + x''^3}{2x'x''}$ برابر است با:

(1) 2 (2) -2 (3) $\frac{11}{2}$ (4) $-\frac{3}{4}$

79) معادله $x^2 + 2\sin x + 1 = 0$ به کدام قیمت x جذر حقیقی دارد:

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

80) در معادله $x^2 + ax + b = 0$ اگر بین جذور رابطه $|x' - x''| = 1$ برقرار باشد آنگاه:

(1) $a^2 = b^2$ (2) $a^2 = 4b^2 - 1$ (3) $a^2 = 4b$ (4) $a^2 = 4b + 1$

81) معادله‌ای که یکی از جذور آن $2 - \sqrt{5}$ باشد عبارت است از:

(1) $x^2 + 4x + 1 = 0$ (2) $x^2 - 4x - 1 = 0$ (3) $x^2 + 7x + 4 = 0$ (4) $x^2 - 9x + 7 = 0$

82) اگر یک جذر معادله $3 + \sqrt{5}$ باشد آن معادله کدام است؟

(1) $x^2 - 6x - 7 = 0$ (2) $x^2 - 6x + 4 = 0$ (3) $x^2 + 7x - 5 = 0$ (4) هیچکدام

83) اگر دو جذر معادله $x^2 + 2kx + k = 0$ معکوس یکدیگر باشند قیمت k عبارت است از:

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

84) اگر دو معادله $x^2 - 3x + a = 0$ و $x^2 + x - 3a = 0$ دارای یک جواب مشترک باشند این جواب مشترک عبارت است از:

(1) 2 (2) 3 (3) -2 (4) -3

85) اگر معادله $x^2 - 4x + k = 0$ دارای دو جذر حقیقی x' و x'' باشد کدام رابطه درست است؟

(1) $x'x'' > 4$ (2) $x'x'' \geq -4$ (3) $x'x'' \leq -4$ (4) $x'x'' \leq 4$

(86) معادله‌ای که جذور آن مکعب جذور معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ باشد عبارت است از:

(1) $x^2 + 9x - 8 = 0$ (2) $x^2 + 9x + 8 = 0$ (3) $x^2 - 9x - 8 = 0$ (4) $x^2 - 9x + 8 = 0$

(87) اگر x' و x'' جذور معادله $3x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند معادله‌ای که جذور آن $x'^2 + x'x''$ و $x''^2 + x'x''$ باشند عبارت است از:

(1) $3x^2 - 3x - 2 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3x^2 + 3x - 2 = 0$ (4) $3x^2 + 3x + 2 = 0$

(88) در معادله درجه دوم $x^2 - 3x + 1 = 0$ حاصل افاده $x'^4 + x''^4 + 2x'^2x''^2$ برابر است با:

(1) 121 (2) 9 (3) 49 (4) 25

(89) یکی از جذور معادله $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1 = 0$ عبارت است از:

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(90) مجموع مربعات جذور معادله $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ برابر است با:

(1) 6 (2) $\sqrt{5} + 2$ (3) 5 (4) $\sqrt{5} + 2\sqrt{6}$

(91) اگر α و β جذور معادله $x^2 + x - 3 = 0$ باشد حاصل افاده $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^3$ برابر است با:

(1) -3 (2) -6 (3) 3 (4) 6

(92) در معادله $x^2 - k^2x + 8 = 0$ رابطه $\sqrt[3]{x'} + \sqrt[3]{x''} = 3$ برقرار است k برابر است با:

(1) 4 (2) -4 (3) ∓ 3 (4) ∓ 4

(93) اگر x' و x'' جذور معادله $x^2 + x - 5 = 0$ باشد حاصل افاده $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} - \frac{1}{5}$ برابر است با:

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) 0 (4) $-\frac{1}{5}$

(94) در معادله $kx^2 + 4x + 3k - 2 = 0$ ، k را طوری دریافت کنید که جذور معکوس یکدیگر باشند:

(1) 2 (2) 1 (3) -1 (4) -2

(95) اگر x' و x'' جذور معادله $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ باشد قیمت افاده $x'\sqrt{x''} + x''\sqrt{x'}$ برابر است با:

(1) $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ (2) $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ (3) $2\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ (4) $2\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

(96) حاصل جمع جذور معادله $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ عبارت است از:

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

97) کدام یک جواب معادله $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ نمی باشد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 7

98) یکی از جذور معادله $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ عبارت است از:

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) -1

99) کدام یک جواب معادله $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ نمی باشد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

100) مجموع جذور معادله $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = 0$ عبارت است از:

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

خود را بیازمایید!

(1) اگر x' و x'' جذور معادله $x^2 + 2(m+1)x + 2m - 1 = 0$ باشد برای کدام قیمت m سه عدد x' و m و x'' حدود متوالی یک تصاعد هندسی هستند؟

(2) برای اینکه جذور معادله $4x^2 - 2mx - 1 = 0$ سین و کوسین یک زاویه باشند m باید برابر باشد به:

(3) مجموع جذور معادله $2^{5x+1} = 8^{x^2+1}$ عبارت است از:

(4) معادله‌ای که یکی از جذور آن $3 - \sqrt{5}$ باشد عبارت است از:

(5) معادله‌ای که یکی از جذور آن $2 + \sqrt{5}$ باشد عبارت است از:

(6) در معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ حاصل افاده $x'^4 + x''^4$ را دریافت کنید.

(7) جذور معادله $\cos^2 \theta \cdot x^2 + x + \sin^2 \theta = 0$ را دریافت کنید.

(8) در معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ حاصل افاده‌های ذیل را دریافت کنید.

$$\frac{1}{x'^3} + \frac{1}{x''^3} \quad (2) \quad x'^2 - x''^2 \quad (1)$$

$$\sqrt{x'} + \sqrt{x''} \quad (4) \quad x'^4 + x''^4 \quad (3)$$

(9) در معادله $x^2 - (m+5)x + 16 = 0$ اگر $x' = 4x''$ باشد در این صورت m برابر است با:

(10) معادله‌ای که جذور آن مکعب جذور معادله $x^2 + x - 1 = 0$ باشد عبارت است از:

(11) در معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ حاصل افاده $\sqrt{\frac{x'}{x''}} + \sqrt{\frac{x''}{x'}}$ برابر است با:

(12) اگر x' و x'' جذور معادله $x^2 - 2x - 9 = 0$ باشد، معادله‌ای که جذور آن $x' + 2x''$ و $x'' + 2x'$ باشد عبارت است از:

(13) اگر a یک جذر معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد قیمت افاده $\frac{a^2}{a^2 - 8a + 2}$ برابر است با:

(14) اگر تفاضل دو جذر معادله $(m+1)x^2 + 3x + 1 - m = 0$ برابر به 2 باشد m را دریافت کنید.

(15) اگر تفاضل دو جذر معادله $x^2 + 9x + m = 0$ مساوی به 2 باشد m را دریافت کنید.

(16) در معادله $2x^2 - 5x + m = 0$ مجموع مربعات دو جذر برابر است با $\frac{37}{4}$ ، m را دریافت کنید.

(17) اگر تفاضل جذور معادله $x^2 + ax + b = 0$ برابر به یک باشد رابطه بین a و b را دریافت کنید.

18) برای کدام قیمت m یکی از جذور معادله $mx^2 - (m+3)x + 3 = 0$ سه برابر عسک جذر دیگر می باشد.

19) معادله ای که جذور آن مربع جذور معادله $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ باشد کدام است؟

20) اگر جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر به x' و x'' باشد معادله ای را دریافت کنید که جذور آن $-\frac{1}{x'}$ و $-\frac{1}{x''}$ باشد.

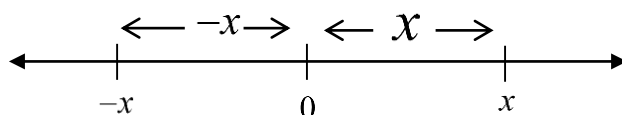
شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب								
1	$m=1$	6	$s_4=433$	11	$2\sqrt{2}$	16	-3								
2	$\sqrt{2}$	7	$x'=-1$, $x''=-\tan^2\theta$	12	$x^2-6x-1=0$	17	$a^2=4b+1$								
3	$\frac{5}{3}$	8	<table><tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>$\sqrt{6}$</td><td>194</td><td>52</td><td>$8\sqrt{3}$</td></tr></table>	4	3	2	1	$\sqrt{6}$	194	52	$8\sqrt{3}$	13	-1	18	$m=1$
4	3	2	1												
$\sqrt{6}$	194	52	$8\sqrt{3}$												
4	$x^2-6x+4=0$	9	$m=5$ $m=-15$	14	$m=\frac{1}{8}$	19	$x^2-10x+16=0$								
5	$x^2-4x-1=0$	10	$x^2+4x-1=0$	15	$m=\frac{77}{4}$	20	$cx^2-bx+a=0$								

ABSOLUTE VALUE **قیمت مطلقه یا**

فاصله بین یک نقطه تا مبدا را بر روی وکتور اعداد حقیقی قیمت مطلقه عدد مذکور می گویند به طور مثال فاصله نقطه a بر روی وکتور اعداد حقیقی را تا مبدا توسط قیمت مطلقه بیان نموده و به شکل $|a|$ نمایش می دهند.

قیمت مطلقه x را قرار رابطه ذیل تعریف می کنیم.

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



نکته : رابطه فوق بیان می کند برای خارج نمودن x از قیمت مطلقه در صورتی که x مثبت و یا صفر باشد در آن تغییری ایجاد نمی کنیم و در صورتی که x منفی تعریف شده باشد جهت خارج نمودن آن از قیمت مطلقه آنرا در یک منفی ضرب می کنیم.

قاعده کلی جهت خارج نمودن یک افاده از داخل قیمت مطلقه

در صورتی که تشخیص دهیم افاده داخل قیمت مطلقه مثبت است افاده را بدون کدام تغییری از قیمت مطلقه خارج می نماییم در صورتی که افاده داخل قیمت مطلقه منفی تشخیص داده شده جهت خارج نمودن افاده از قیمت مطلقه آنرا در یک منفی ضرب نموده قیمت مطلقه را بر میداریم.

مثال : در صورتی که $x < 3$ باشد حاصل افاده $|x-3|$ کدام است؟

حل :

$$x < 3 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow |x-3| = -(x-3) = 3-x$$

مثال : در صورتی که $x < y$ باشد قیمت افاده $|x-y|$ کدام است؟

حل :

$$x < y \Rightarrow x-y < 0 \Rightarrow |x-y| = -(x-y) = y-x$$

مثال : قیمت افاده $|\sqrt{3}-\sqrt{2}|$ کدام است؟

$$\sqrt{3} > \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3}-\sqrt{2} > 0 \Rightarrow |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

حل :

مثال : قیمت افاده $|e-\pi|$ کدام است؟

حل :

$$e = 2.718, \quad \pi = 3.14 \Rightarrow e < \pi \Rightarrow e-\pi < 0 \Rightarrow |e-\pi| = -(e-\pi) = \pi-e$$

قوانین اساسی قیمت مطلقه (The Basic Properties Of The Absolute Value)

1) در صورتیکه افاده داخل قیمت مطلقه دارای توان کلی باشد توان را میتوانیم برای قیمت مطلقه اختصاص دهیم.

$$|(f(x))^n| = |f(x)|^n \quad |(3x-4)^4| = |3x-4|^4$$

2) در صورتیکه توان کل افاده داخل قیمت مطلقه جفت باشد قیمت مطلقه را میتوانیم بر داریم.

$$|(f(x))^{2n}| = (f(x))^{2n} \quad |(3x-4)^4| = (3x-4)^4$$

$$|(-2)^2| = (-2)^2 = 4 \quad |(3x)^6| = (3x)^6$$

3) در صورت طاق بودن توان کل افاده داخل قیمت مطلقه اجازه برداشتن قیمت مطلقه را نداریم.

$$|(f(x))^{2n-1}| \neq (f(x))^{2-1} \quad |(3x-4)^5| \neq (3x-4)^5$$

$$|(-3)^3| \neq (-3)^3$$

4) در صورتیکه a , b شامل اعداد حقیقی طوریکه $a > b$ باشد روابط ذیل صدق می کند :

$$1) |a-b| = a-b$$

$$2) |b-a| = -(b-a) = a-b$$

نکته : جهت خارج نمودن یک افاده از قیمت مطلقه با توجه به شرایطی که برای متحول آن وضع شده است باید تشخیص دهیم که افاده داخل قیمت مطلقه مثبت ، صفر و یا منفی می شود. در صورت منفی شدن افاده داخل قیمت مطلقه ، قیمت مطلقه را برداشته افاده داخل آنرا در یک منفی ضرب می کنیم. در صورت مثبت بودن افاده بدون تغییر از قیمت مطلقه خارج می شود. در صورت صفر شدن افاده داخل قیمت مطلقه حاصل را برابر صفر قرار می دهیم.

مثال : در صورتیکه $3 < x < 8$ باشد حاصل $|2-x| + |8-x|$ را دریافت نمائید.

$$2 < x \Rightarrow 2-x < 0 \Rightarrow |2-x| = -(2-x) = x-2$$

$$x < 8 \Rightarrow 8-x > 0 \Rightarrow |2-x| + |8-x| = x-2+8-x = 6 \quad |8-x| = 8-x \Rightarrow$$

مثال : در صورتیکه $4 < x < 9$ باشد حاصل افاده $|x-|x-4|+3|+2x+3|$ را دریافت نمائید.

$$4 < x \Rightarrow x-4 > 0 \Rightarrow |x-4| = x-4$$

$$|x-|x-4|+3|+2x+3| = |x-x+4+3|+2x+3 \Rightarrow |7|+2x+3 = 7+2x+3 = 2x+10$$

5) در صورتیکه چندین قیمت مطلقه در حالت جمع برابر به صفر قرار داده شده باشد به طور قطعی هر یک از افاده های داخل قیمت مطلقه را برابر صفر قرار داده می توانیم.

$$|f(x)| + |g(x)| + |l(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \quad g(x) = 0, \quad l(x) = 0$$

مثال : در معادله $|x-3| + |2y+x-25| = 0$ قیمت y کدام است.

$$|x-3| + |2y+x-25| = 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$2y+x-25 = 0 \Rightarrow 2y+3-25 = 0 \Rightarrow 2y = 22 \Rightarrow y = 11$$

مثال : در معادله $|a-2|+|b-4a|+|c-2b|=0$ حاصل $a+2b+3c$ کدام است.

$$|a-2|+|b-4a|+|c-2b|=0 \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow a=2$$

$$b-4a=0 \Rightarrow b-4(2)=0 \Rightarrow b=8$$

$$c-2b=0 \Rightarrow c-2(8)=0 \Rightarrow c=16$$

$$a+2b+3c=2+2(8)+3(16)=66$$

6) در صورت خارج نمودن یک افاده با توان جفت از تحت جذر آنرا تحت قیمت مطلقه از تحت جذر خارج می نمائیم.

$$\forall x \in R \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| \quad \sqrt[n]{(f(x))^{2n}} = |f(x)|$$

$$1) \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| \quad 2) \sqrt[4]{(3x)^4} = |3x|$$

7) در صورتیکه افاده داخل قیمت مطلقه در حالت ضرب و تقسیم قرار داشته باشد می توانیم قیمت مطلقه را برای هر یک از این افاده ها به طور جداگانه اختصاص دهیم.

$$1) |x.y| = |x| \cdot |y| \quad 2) |f(x).g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$$

$$3) \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \quad |x^2+5x+6| = |(x+3)(x+2)| = |x+3| \cdot |x+2|$$

مثال : در صورتیکه $x < 0$ باشد حاصل افاده $\frac{\sqrt{x^2}}{x} + 3$ کدام است.

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x} + 3 = \frac{|x|}{x} + 3 = \frac{-x}{x} + 3 = -1 + 3 = 2$$

مثال : در صورتیکه $x > 3$ باشد حاصل افاده $\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2-9} + \frac{1}{x+3}$ کدام است.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} &= \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} = \frac{|x-3|}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} = \frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+3} \end{aligned}$$

نکته : روابط ذیل را در قیمت مطلقه به یاد داشته باشید :

$$1- \text{در صورتیکه } x > 0, y < 0 \text{ باشد در این حالت روابط } |x.y| = -(x.y) \text{ و نیز } \left| \frac{x}{y} \right| = -\left(\frac{x}{y} \right) \text{ و در}$$

$$\text{صورتیکه } x < 0, y < 0 \text{ باشد روابط } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{x}{y} \text{ و } |x.y| = (x.y) \text{ صدق می کند.}$$

2- در صورتیکه در دو طرف یک مساوات قیمت مطلقه قرار داشته باشد اطراف مساوات را به توان جفت رسانده قیمت مطلقه را بر می داریم.

$$|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow |f(x)|^{2n} = |g(x)|^{2n} \Rightarrow (f(x))^{2n} = (g(x))^{2n}$$

حل معادلات شامل قیمت مطلقه

برای دریافت جذور یک معادله شامل قیمت مطلقه باید آنرا از حالت قیمت مطلقه خارج نماییم. برای انجام این عمل در دو مرحله اجرا می شود و در هر مرحله یک تعداد از جذور معادله حاصل می شود.

مرحله اول : اگر در معادله تنها یک قیمت مطلقه شامل باشد افاده داخل قیمت مطلقه را مثبت فرض نموده قیمت مطلقه را بدون کدام تغییری بر میداریم با حل این معادله ساده جذور معادله حاصل میشود.

مرحله دوم : در این مرحله افاده داخل قیمت مطلقه را منفی فرض نموده با ضرب نمودن یک منفی در افاده داخل قیمت مطلقه ، قیمت مطلقه را بر میداریم و با حل آن جذور معادله حاصل می شود.

مثال : قیمت x را در معادله $\left| \frac{2x-1}{5} \right| = 7$ دریافت نمائید؟

حل : مرحله اول : $\frac{2x-1}{5} > 0$ را فرض می نمائیم در این حالت

$$\left| \frac{2x-1}{5} \right| = 7 \Rightarrow \frac{2x-1}{5} = 7 \Rightarrow 2x-1=35 \Rightarrow x_1=18$$

مرحله دوم : $\frac{2x-1}{5} < 0$ را فرض می نمائیم در این حالت

$$\left| \frac{2x-1}{5} \right| = 7 \Rightarrow -\left(\frac{2x-1}{5} \right) = 7 \Rightarrow \frac{2x-1}{5} = -7 \Rightarrow 2x-1=-35 \Rightarrow x_2=-17$$

مثال : قیمت x را در معادله $|x^2-1|=3$ دریافت نمائید؟

حل :

مرحله اول :

$$|x^2-1|=3 \Rightarrow x^2-1=3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2$$

مرحله دوم :

$$|x^2-1|=3 \Rightarrow -(x^2-1)=3 \Rightarrow x^2-1=-3 \Rightarrow x^2=-2$$

در حالت $x^2=-2$ معادله حل ندارد بناء جواب های کلی این معادله اعداد $\{-2,+2\}$ است.

مثال : در معادله $|x-4|+\sqrt{x^2-8x+16}=12$ حاصل $x_1 \cdot x_2$ را دریافت نمائید؟

حل :

$$|x-4|+\sqrt{x^2-8x+16}=12 \Rightarrow |x-4|+\sqrt{(x-4)^2}=12 \Rightarrow |x-4|+|x-4|=12$$

$$2|x-4|=12 \Rightarrow |x-4|=6$$

$$1) \quad x-4=6 \Rightarrow x_1=10$$

$$2) \quad -(x-4)=6 \Rightarrow -x+4=6 \Rightarrow x_2=-2$$

بناء داریم که :

$$x_1 \cdot x_2 = (10) \cdot (-2) = -20$$

نکته : در صورتیکه یک معادله شکل $|x|=a$ را داشته باشد طوری که $a > 0$ باشد جذور آن $x_1 = a$, $x_2 = -a$ است.

مثال : قیمت x را در معادله $|x|=4$ دریافت نمائید؟

حل :

$$|x|=4 \Rightarrow \begin{matrix} 1) & x_1 = 4, \\ 2) & -x = 4 \Rightarrow x_2 = -4 \end{matrix}$$

نکته : در صورتیکه یک معادله قیمت مطلقه شکل $|f(x)|=a$ را داشته باشد طوری که $a < 0$ باشد در این حالت معادله حل ندارد زیرا قیمت مطلقه برابر یک عدد منفی شده نمی تواند.

مثال : قیمت x را در معادله $|x-3|=-5$ دریافت نمائید؟

حل : معادله دارای حل نمی باشد و ست حل آن $\emptyset$ است.

نکته : در صورتیکه یک قیمت مطلقه برابر به صفر باشد حتما افاده داخل قیمت مطلقه صفر بوده است.

$$|f(x)|=0 \Rightarrow f(x)=0$$

مثال : در معادله $|x^2+5x+6|=0$ قیمت x را دریافت نمائید؟

حل :

$$|x^2+5x+6|=0 \Rightarrow x^2+5x+6=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=-3$$

نکته : اگر در یک معادله شامل قیمت مطلقه افاده داخل قیمت مطلقه همراه تغییر علامه از قیمت مطلقه خارج شده باشد حتما افاده داخل قیمت مطلقه کوچکتر از صفر بوده است.

$$|f(x)|=-f(x) \Rightarrow f(x)<0$$

مثال : در معادله $|3x-2|=2-3x$ قیمت x را دریافت نمائید؟

حل :

$$|3x-2|=2-3x \Rightarrow |3x-2|=-(3x-2) \Rightarrow 3x-2<0 \Rightarrow x<\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$$

بناء در این معادله اعداد صدق میکند که شامل انتروال $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ باشد.

نکته : در صورتیکه در یک معادله چندین قیمت مطلقه در حالت جمع برابر به صفر قرار داشته باشد افاده داخل هر قیمت مطلقه صفر است.

$$|f(x)|+|g(x)|+\dots+|l(x)|=0 \Rightarrow f(x)=g(x)=\dots=l(x)=0$$

مثال : قیمت $x+y$ را در معادله $|x-y+1|+|3x-y|=0$ دریافت نمائید؟

حل :

$$|x-y+1|+|3x-y|=0 \quad 3x-y=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=y$$

$$x-y+1=0 \quad \Rightarrow \quad x-3x+1=0 \quad \Rightarrow \quad -2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

$$y=3x \quad \Rightarrow \quad y=3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

$$x+y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

نکته : اگر در یک معادله شامل قیمت مطلقه برای مجهول شرط گذاشته شده باشد با توجه به شرط معلوم مینمائیم که افاده داخل قیمت مطلقه مثبت ، صفر و یا منفی میشود پس از آن قیمت مطلقه را بر داشته معادله را حل می نمائیم.

مثال : در صورتیکه $-5 < x < -1$ باشد قیمت y را در معادله $|x+1|+|x+5|+y=7$ دریافت نمائید؟

حل :

$$-5 < x < -1; \quad x < -1 \quad \Rightarrow \quad x+1 < 0 \quad \Rightarrow \quad |x+1|=-(x+1)$$

$$-5 < x < -1; \quad x > -5 \quad \Rightarrow \quad x+5 > 0 \quad \Rightarrow \quad |x+5|=x+5$$

$$\Rightarrow \quad -(x+1)+x+5+y=7 \quad \Rightarrow \quad y+4=7 \quad \Rightarrow \quad y=3$$

$$|x+1|+|x+5|+y=7$$

مثال : در صورتیکه $x^{1007} < 0$ باشد قیمت x را در معادله $|x|+|5-x|+|6-x|+|7-x|+|x-9|=1007$ دریافت نمائید؟

دریافت نمائید؟

حل :

$$x^{1007} < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

$$; \quad -x+5-x+6-x+7-x+9-x=1007$$

$$|x|+|5-x|+|6-x|+|7-x|+|x-9|=1007$$

$$-5x=980 \quad \Rightarrow \quad x=-196$$

نکته : در صورتیکه در دو طرف قیمت مطلقه یک یک قیمت مطلقه موجود باشد برای دریافت جذور این معادله

ابتدا اطراف معادله را به توان 2 بالا برده قیمت مطلقه را بر میداریم.

مثال : قیمت x را در معادله $|x-3|=|x-1|$ دریافت نمائید؟

حل :

$$|x-3|=|x-1|; \quad |x-3|^2=|x-1|^2 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2=(x-1)^2$$

$$x^2-6x+9=x^2-2x+1 \quad \Rightarrow \quad -4x=-8 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

نکته : اگر در چندین قیمت مطلقه در داخل یک قیمت مطلقه قرار داشته باشد مرحله برداشتن قیمت مطلقه را چندین بار تکرار می نمائیم.

مثال : در معادله $|3 - |x - 1|| = 2$ مجموع جذور را دریافت نمائید؟

حل :

$$|3 - |x - 1|| = 2 ;$$

$$1) \quad 3 - |x - 1| = 2 \quad \Rightarrow \quad |x - 1| = 1$$

$$x - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad -(x - 1) = 1 \Rightarrow x - 1 = -1 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$2) \quad -(3 - |x - 1|) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3 - |x - 1| = -2 \Rightarrow |x - 1| = 5$$

$$x - 1 = 5 \Rightarrow x_3 = 6, \quad -(x - 1) = 5 \Rightarrow x - 1 = -5 \Rightarrow x_4 = -4$$

$$\sum x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (2) + (0) + (6) + (-4) = 4$$

نکته : در حل یک معادله شامل قیمت مطلقه باید جذور حاصله را در اصل معادله قرار دهیم در صورتی که صدق نکند جذور معادله بوده نمی تواند.

مثال : در معادله $|5x - 3| = x - 9$ قیمت x را دریافت نمائید؟

حل :

$$|5x - 3| = x - 9 ;$$

$$1) \quad 5x - 3 = x - 9 \quad \Rightarrow \quad 4x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$$

عدد $-\frac{3}{2}$ جذر معادله بوده نمیتواند زیرا سمت راست قیمت مطلقه را منفی می سازد. میدانیم حاصل قیمت مطلقه منفی شده نمی تواند.

$$2) \quad -(5x - 3) = x - 9 \Rightarrow 5x - 3 = -x + 9 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

عدد 2 نیز جذر معادله بوده نمی تواند زیرا حاصل قیمت مطلقه را منفی می سازد. میدانیم حاصل قیمت مطلقه عدد منفی شده نمی تواند برای امتحان قیمت را در معادله جایگزین می کنیم.

$$|5x - 3| = x - 9 \Rightarrow |5(2) - 3| = 2 - 9 \Rightarrow |7| = -7 \Rightarrow 7 \neq -7$$

تطبیقات

قیمت افاده‌های ذیل را دریافت کنید.

$$1) \quad |\sqrt{2}-1| \Rightarrow \sqrt{2}-1 > 0 \Rightarrow |\sqrt{2}-1| = +(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$$

$$2) \quad |2-\sqrt{7}| \Rightarrow 2-\sqrt{7} < 0 \Rightarrow |2-\sqrt{7}| = -(2-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-2$$

$$3) \quad |1-\sin \alpha| \Rightarrow -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow 1-\sin \alpha \geq 0 \Rightarrow |1-\sin \alpha| = +(1-\sin \alpha) = 1-\sin \alpha$$

$$4) \quad |1-\cos \alpha| \Rightarrow -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow 1-\cos \alpha \geq 0 \Rightarrow |1-\cos \alpha| = +(1-\cos \alpha) = 1-\cos \alpha$$

$$5) \quad |x+2|-2 \Rightarrow \text{if } x \geq -2 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = +(x+2)$$

$$|x+2|-2 = x+2-2 = x$$

$$\text{if } x < -2 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2) = -x-2$$

$$|x+2|-2 = -x-2-2 = -x-4$$

$$6) \quad \begin{aligned} |x+2|+|x-2| \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{aligned}$$

	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
x				
$x+2$	-	•	+	+
$x-2$	-	-	•	+

$$\text{if } x \leq -2 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = -(x+2) \\ |x-2| = -(x-2) \end{cases} \Rightarrow |x+2|+|x-2| = -x-2-x+2 = -2x$$

$$\text{if } -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = +(x+2) \\ |x-2| = -(x-2) \end{cases} \Rightarrow |x+2|+|x-2| = x+2-x+2 = 4$$

$$\text{if } x \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = +(x+2) \\ |x-2| = +(x-2) \end{cases} \Rightarrow |x+2|+|x-2| = x+2+x-2 = 2x$$

$$\Rightarrow |x+2|+|x-2| = \begin{cases} 2x & x \geq 2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 2 \\ -2x & x \leq -2 \end{cases}$$

$$7) \quad ||x-2|+x|$$

$$\text{if } x \leq 2 \Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \Rightarrow ||x-2|+x| = |-(x-2)+x| = |-x+2+x| = |2| = 2$$

$$\text{if } x > 2 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow |x-2| = +(x-2) \Rightarrow ||x-2|+x| = |(x-2)+x| = |2x-2| = 2|x-1| = 2(x-1)$$

(8) اگر x و y معکوس یکدیگر باشند حاصل افاده $x|y| + y|x|$ را دریافت کنید.

$$x|y| + y|x| = x \left| \frac{1}{x} \right| + \frac{1}{x} |x| = \frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x}$$

$$\text{if } x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} + \frac{x}{x} = 2$$

$$\text{if } x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x} = \frac{x}{-x} + \frac{-x}{x} = -2$$

(9) حاصل افاده ذیل را دریافت کنید.

$$\sqrt{a^2 + 1 + 2\sqrt{a^2}} \quad , \quad a < 0$$

$$\sqrt{a^2 + 1 + 2|a|} \quad , \quad a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

$$\sqrt{a^2 - 2a + 1} = \sqrt{(a-1)^2} = |a-1| = -(a-1) = 1-a$$

(10) اگر $1 < x < 2$ باشد حاصل افاده ذیل را دریافت کنید.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)+1-2\sqrt{x-1}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}} \\ &= \frac{1}{|\sqrt{x-1}+1|} + \frac{1}{|\sqrt{x-1}-1|} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{(\sqrt{x-1}-1) - (\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}-1)} \\ &= \frac{-2}{(x-1)-1} = \frac{-2}{x-2} = \frac{2}{2-x} \end{aligned}$$

(11) اگر $-2 < x < 0$ باشد حاصل افاده ذیل را دریافت کنید.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 - 4\sqrt{x^2} + 4} + \sqrt{x^2 + 4\sqrt{x^2} + 4} \\ &= \sqrt{x^2 - 4|x| + 4} + \sqrt{x^2 + 4|x| + 4} = \sqrt{|x|^2 - 4|x| + 4} + \sqrt{|x|^2 + 4|x| + 4} \\ &= \sqrt{(|x|-2)^2} + \sqrt{(|x|+2)^2} \quad ; \quad -2 < x < 0 \Rightarrow |x| = -x \\ &= ||x|-2| + ||x|+2| = |-x-2| + |-x+2| = -(-x-2) + (-x+2) \\ &= x+2 + (-x+2) = 4 \end{aligned}$$

(12) اگر $a \geq 2$ باشد حاصل افاده ذیل را دریافت کنید.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 - 4a + 4} + \sqrt{a^2 + 6a + 9} \\ &= \sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a+3)^2} = |a-2| + |a+3| \end{aligned}$$

$$\text{if } a \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} a-2 \geq 0 \Rightarrow |a-2| = +(a-2) \\ a \geq 2 \Rightarrow a+3 \geq 5 \Rightarrow |a+3| = a+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |a-2| + |a+3| = a-2 + a+3 = 2a+1$$

(13) اگر $x^2 < 8$ باشد حاصل افاده ذیل را دریافت کنید.

$$|x-2\sqrt{2}| + |x+2\sqrt{2}|$$

$$= |x-\sqrt{8}| + |x+\sqrt{8}| ; \quad x^2 < 8 \Rightarrow |x| < \sqrt{8} \Rightarrow -\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\sqrt{8} < 0 \Rightarrow |x-\sqrt{8}| = -(x-\sqrt{8}) = \sqrt{8}-x \\ x+\sqrt{8} > 0 \Rightarrow |x+\sqrt{8}| = +(x+\sqrt{8}) = x+\sqrt{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x-\sqrt{8}| + |x+\sqrt{8}| = \sqrt{8}-x + x + \sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

(14) برای کدام قیمت‌های x افاده $|x+5| + |x-1| + 2x$ مستقل از x می‌باشد.

$$\text{if } x \leq -5 \Rightarrow x+5 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} |x+5| = -(x+5) \\ |x-1| = -(x-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x+5| + |x-1| + 2x = -x-5 - x+1 + 2x = -4$$

لذا افاده فوق برای $x \leq -5$ مستقل از x می‌باشد.

سوالات معادلات قیمت مطلقه

1. در معادله $|3x-12|=12-3x$ قیمت x کدام است؟
 (A) $(-12, -3)$ (B) $(-\infty, 4]$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $(-\infty, 4)$
2. مقدار x در معادله $|6-|4x+3||=7$ چند است؟
 (A) $(-4, \frac{5}{2})$ (B) $(-2, \frac{5}{2})$ (C) $(-4, \frac{2}{5})$ (D) $(-\infty, 4)$
3. در صورتیکه $x > 0$ باشد مقدار x در معادله $|-x-3|-|3x+7|+|-8|=0$ کدام است؟
 (A) -2 (B) -1 (C) 2 (D) 3
4. مقدار x را از معادله $|\frac{3x-6}{x}|=\sqrt{(-5)^2}$ بدست آورید؟
 (A) $(-4, \frac{3}{4})$ (B) $(-2, \frac{5}{2})$ (C) $(-3, \frac{3}{4})$ (D) $(-\infty, 4)$
5. مجموع مقادیر x را از معادله $|x^2-3x-4|=|x-4|$ بدست آورید؟
 (A) -2 (B) 2 (C) 1 (D) 3
6. مقدار x را از معادله $\frac{|2x-1|}{|x-3|}=0$ در یابید؟
 (A) $2/7$ (B) $7/23$ (C) $7/2$ (D) $1/2$
7. مقدار افاده $|4-\sqrt{8}|+|2-\sqrt{8}|$ کدام گزینه است؟
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$
8. در صورتیکه $x < 0 < y$ باشد حاصل معادله $|x|-|y|-|x-y|-|y-x|$ چند است؟
 (A) $y-3x$ (B) 0 (C) $x+3y$ (D) $x-3y$
9. در معادله $|y \cdot (y-1)|=2$ قیمت y چند است؟
 (A) $\{-2, -1\}$ (B) $\{-1\}$ (C) $\{-1, 2\}$ (D) $\{0, 2\}$
10. قیمت x را از معادله $|3-2x|=x-3$ در یابید؟
 (A) $\{0\}$ (B) $\{2\}$ (C) هیچکدام (D) $\{-1\}$
11. قیمت a در معادله $2a-4=|a-1|$ کدام گزینه است؟
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
12. حاصل معادله $|x-2|=2-x$ چیست؟
 (A) R (B) $(0, +\infty)$ (C) $(-\infty, 0)$ (D) 2
13. در معادله $|3+|x^2+4||=23$ مجموع مقادیر x را دریابید؟
 (A) 0 (B) 2 (C) 5 (D) 9

14. مقدار $\sum x$ را در معادله $|3+2x|=15$ حاصل نمائید؟
 (A) 9 (B) -3 (C) 3 (D) 0
15. در صورتیکه $2 < x < 6$ باشد مقدار x را از معادله $|x-2|+|x-6|+2x=10$ بدست آورید؟
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
16. مقدار $\sum x$ را از معادله $|3-|x-1||=2$ حاصل کنید؟
 (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4
17. از معادله $|2x-4|+|y-5|+|z+2|=0$ مقدار $x+y+z$ را حاصل کنید؟
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
18. حاصل معادله $|3x-2|=2x-1$ کدام گزینه است؟
 (A) $\{1\}$ (B) $\{3/5\}$ (C) $\{1, 3/5\}$ (D) $\{0, 1\}$
19. حل معادله $\frac{x+3}{|x-1|+2}=\frac{1}{2}$ چیست؟
 (A) $\{-5, -1\}$ (B) $\{-5\}$ (C) $\{-1\}$ (D) $\emptyset$
20. در معادله $|3x-5|=-x$ قیمت x را بیابید؟
 (A) هیچکدام (B) $\{1\}$ (C) $\{5/2\}$ (D) $\{4/3\}$
21. مقدار x را از معادله $4^{|x-2|}=64$ حاصل نمائید؟
 (A) $\{-1, 5\}$ (B) $\{-1\}$ (C) $\{5\}$ (D) $\{-5, 1\}$
22. مقدار $\sum x$ را از معادله $|3x-4|=6-x$ بدست آورید؟
 (A) $7/2$ (B) $5/2$ (C) $3/2$ (D) $1/2$
23. در معادله $|5x+2|=|2x+5|$ مجموع مقادیر x را بدست آورید؟
 (A) 9 (B) 8 (C) 2 (D) 0
24. در معادله $|2x-1|=|x+3|$ مجموع مقادیر x عبارت است از:
 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{10}{7}$ (4) $\frac{10}{3}$
25. از معادله $|x^2-9|=9-x^2$ حدود x را دریافت کنید:
 (1) $-2 \leq x \leq 2$ (2) $4 \leq x \leq 3$ (3) $-3 \leq x \leq 3$ (4) $-7 \leq x \leq 7$
26. مقدار $\sum x$ را از معادله $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{1}{2}$ بدست آورید؟

$$\frac{10}{3} \quad (4) \quad \frac{11}{3} \quad (3) \quad \frac{7}{3} \quad (2) \quad \frac{5}{3} \quad (1)$$

(27) از معادله $|x^2 - \pi^2| = \pi^2 - x^2$ حدود تغييرات x را دريافت كنيد.

$$-\pi \leq x \leq 2\pi \quad (4) \quad -3\pi \leq x \leq \pi \quad (3) \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad (2) \quad -3\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \quad (1)$$

(28) مجموع مقادير x را از معادله $x^2 + 6x = 5|x|$ دريافت كنيد.

$$0 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

(29) مجموع مقادير x را از معادله $|x^2 - 3x| + x^2 - 2 = 0$ دريافت كنيد.

$$-\frac{5}{6} \quad (4) \quad -\frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{1}{6} \quad (2) \quad \frac{3}{7} \quad (1)$$

(30) در معادله $|x^2 - x - 6| = x + 2$ قيمت‌هاي x عبارت است از:

$$\{-1, -2, -3\} \quad (4) \quad \{-2, 4, 2\} \quad (3) \quad \{3, -2, 4\} \quad (2) \quad \{2, -2, 3\} \quad (1)$$

(31) مجموع مقادير x از معادله $x^2 + 3|x| = 4$ عبارت است از:

$$5 \quad (4) \quad 0 \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

(32) از معادله $\sum x, \|x - 5| - 10| = 4$ عبارت است از:

$$40 \quad (4) \quad 30 \quad (3) \quad 20 \quad (2) \quad 10 \quad (1)$$

(33) در معادله $5^{x+|x+2|} = 25$ ، x عبارت است از:

$$1, 3 \quad (4) \quad (-\infty, 2] \quad (3) \quad x \geq 3 \quad (2) \quad x \leq 2 \quad (1)$$

(34) حل معادله $|x - 2| = 1 - x$ عبارت است از:

$$\emptyset \quad (4) \quad -\frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{5}{2} \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (1)$$

(35) حل معادله $|x| - x = 2$ عبارت است از:

$$-1 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

(36) حل معادله $|x + 2| = 1 + x$ عبارت است از:

$$\emptyset \quad (4) \quad \frac{5}{2} \quad (3) \quad -\frac{3}{2} \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (1)$$

37) قیمت x در معادله $|x-2|=2x-10$ عبارت است از:

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 8

38) قیمت‌های x در معادله $|2x-3|=|x+7|$ عبارت است از:

- (1) $\{3, 4\}$ (2) $\{-3, -5\}$ (3) $\{-7, 2\}$ (4) $\{10, -4/3\}$

39) قیمت x در معادله $|2x-3|-|x+1|=5x-10$ عبارت است از:

- (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{7}{8}$

40) قیمت‌های x در معادله $\frac{x+|x|}{2} + \frac{|x-x|}{2} = 1$ عبارت است از:

- (1) $\{1, 2\}$ (2) $\{3, 4\}$ (3) $\{1, 5\}$ (4) $\{1, -1\}$

41) $\sum x$ را از معادله $|x^2-3x+2|=|x-1|$ دریافت کنید.

- (1) 7 (2) 8 (3) 9 (4) 4

42) قیمت x در معادله $\left|\frac{x-2}{x-3}\right| = \frac{2-x}{x-3}$ عبارت است از:

- (1) $[2, 3]$ (2) $(2, 3]$ (3) $[2, 3)$ (4) $(2, 3)$

43) قیمت‌های x در معادله $x^2-5|x|+6=0$ عبارت است از:

- (1) $\{\mp 2, \mp 5\}$ (2) $\{2, 3, -2, -1\}$ (3) $\{-1, -5, -6\}$ (4) $\{-2, -3, 3, 2\}$

44) قیمت‌های x از معادله $|x|=x^2+x-2$ عبارت است از:

- (1) $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1+\sqrt{3}\}$ (2) $\{-1, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}\}$ (3) $\{-1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ (4) $\{-1, -\sqrt{3}, \sqrt{2}\}$

45) اگر $a^2+9b^2=8ab$ باشد قیمت افاده $\frac{|a+3b|}{|a-3b|}$ عبارت است از:

- (1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{5}$ (4) $\sqrt{7}$

46) مجموع قیمت‌های x را از معادله $|x^2-3x+1|=1$ بدست آورید؟

- (1) 1 (2) 5 (3) 6 (4) 7

47) قیمت x در معادله $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$ مساوی است به:

- (1) $(-\infty, 2)$ (2) $(-\infty, 3)$ (3) $(-\infty, 4)$ (4) $(-\infty, 2]$

48) برای هر $x \in [1, +\infty)$ باشد قیمت افاده $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ برابر است به:

- (1) x (2) $x-2$ (3) $-x$ (4) $2-3x$

49) معادله $|x^2 - 1| = |x|$ دارای چند جواب حقیقی می باشد.

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

50) مجموع جذور معادله $(x-1)^2 - 5|x-1| + 4 = 0$ برابر است با:

- (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 3

51) اگر $1 < x < 2$ باشد حاصل افاده $|x-1| + |x-3| - |2x-1|$ برابر است با:

- (1) $3+2x$ (2) 3 (3) $3-2x$ (4) -5

52) اگر $b < a < 0$ باشد حاصل افاده $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$ مساوی است با:

- (1) $2a$ (2) $-2a$ (3) $2b$ (4) $-2b$

53) جذور معادله $\frac{|2x|}{|x+1|} = 3$ عبارت است از:

- (1) $\emptyset$ (2) $\{-3, 3/5\}$ (3) $\{-3, -3/5\}$ (4) $\{2, 3\}$

54) اگر $\frac{|c|a^2}{2|b|} = \frac{-ca^2}{2b}$ در این صورت:

- (1) $abc > 0$ (2) $a > 0$ (3) $a^2b > 0$ (4) $bc < 0$

55) جواب سیستم $\begin{cases} y = |x-2| \\ |x+1| = y \end{cases}$ برابر است با:

- (1) (0,1) (2) (1/2, 3/2) (3) (1, 1/2) (4) (1,1)

56) جذور معادله $|x^2 - 2x - 1| = |x^2 - 2x + 3|$ عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2,3 (3) 4,5 (4) 7,8

57) جذور معادله $\left| \frac{x^2 - 6\sqrt{x+7}}{x^2 + 6\sqrt{x+7}} \right| = 1$ عبارت است از:

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

58) جذور معادله $\frac{1-2x}{3-|x-1|} = 1$ عبارت است از:

- (1) 1 (2) 3 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $-\frac{1}{3}$

59) جذور معادله $|x-|4-x|| - 2x - 4 = 0$ عبارت است از:

- (1) $\emptyset$ (2) 3 (3) 0 (4) 5

60) مجموع جذور معادله $|x+1| - |3-x| = x+1 - |3-6x|$ عبارت است از:

- (1) $\frac{7}{6}$ (2) $\frac{8}{6}$ (3) $\frac{9}{6}$ (4) $\frac{6}{7}$

61) $\sum x$ در معادله $|x^3 - 4x| = 2 - x$ عبارت است از:

- (1) $\pm\sqrt{3}$ (2) $\pm\sqrt{5}$ (3) $\pm\sqrt{7}$ (4) $\pm\sqrt{2}$

معادلات نمایی

به معادلاتی که مجهول آن در توان قرار داشته باشد معادله نمایی گویند.

$$1) 3^{x^2+4} = 5$$

$$2) 3^{\sqrt{x}+5} = 27^{3x+5}$$

حل معادلات نمایی

روش اول : برابر ساختن قاعده ها :

جهت حل معادلات نمایی با استفاده از قوانین ریاضی معادله را به شکل $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (که در آن $a > 0$ و

$a \neq 1$) تبدیل می نمائیم در این حالت این معادله همراه معادله $f(x) = g(x)$ معادل است.

معادلات معادل : به معادلاتی که دارای شکل متفاوت ولی جذور یکسان باشند معادلات معادل گویند.

به طور مثال دو معادله $\sqrt{x} = 1$ و $\log x = 0$ معادل هستند زیرا جذر هر دو معادله عدد یک است.

معادلات $2^{x(x-1)} = 1$ و $\sqrt{x} = x$ نیز معادل هستند زیرا دارای جذور یکسان $\{1, 0\}$ هستند.

مثال : معادله $2^{x^2-2x} = 8^{x-2}$ را حل نمائید؟

حل :

$$2^{x^2-2x} = 8^{x-2} \Rightarrow 2^{x^2-2x} = 2^{3x-6} \Rightarrow x^2 - 2x = 3x - 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = +2, \quad x_2 = +3$$

مثال : مجموع جذور معادله $2^{5x+1} = 8^{x^2+1}$ را دریافت نمائید؟

حل :

$$2^{5x+1} = 2^{3x^2+3} \Rightarrow 3x^2 + 3 = 5x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}$$

مثال : قیمت x در معادله $\frac{1}{5^{2x+2}} = 25^{3x}$ کدام است؟

حل :

$$\frac{1}{5^{2x+2}} = 25^{3x} \Rightarrow 5^{-2x-2} = 5^{6x} \Rightarrow 6x = -2x - 2 \Rightarrow 8x = -2$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

نکته : گاهی اوقات برابر ساختن قاعده در معادله نمایی کار ساده ای نیست ولی با توجه و دقت به سوال میتوان

فهمید که به کدام قاعده باید تبدیل نمائیم.

مثال : قیمت x را در معادله $\frac{0.2^{x-0.5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0.04^{x-1}$ دریافت نمائید؟

حل : با کمی دقت متوجه می شویم برای حل این سوال باید قاعده را $\frac{1}{5}$ سازیم.

$$\frac{0.2^{x-0.5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0.04^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-0.5} \cdot (5)^{-\frac{1}{2}} = 5 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-0.5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0.5} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-2}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-2} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3} \Rightarrow 2x-3=x \Rightarrow x=3$$

نکته : در صورتی که در یک معادله نمایی قاعده را با یکدیگر برابر نشود با استفاده از دو قانون لوگاریتم

$$\log_a a = 1, \quad a^{\log_d c} = c^{\log_d a} \quad \text{استفاده نموده قاعده ها را برابر می سازیم.}$$

مثال : قیمت x را در معادله $3^{x^2-4} = 5^{2x}$ دریافت نمائید؟

حل :

$$3^{x^2-4} = (5^1)^{2x} \Rightarrow 3^{x^2-4} = \left(5^{\log_3 3}\right)^{2x} \Rightarrow 3^{x^2-4} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{2x}$$

$$3^{x^2-4} = 3^{2(\log_3 5) \cdot x} \Rightarrow x^2 - 4 = 2(\log_3 5) \cdot x \Rightarrow x^2 - 2\log_3 5 \cdot x - 4 = 0$$

با استفاده از قانون محمد بن موسی خوارزمی قیمت x از معادله فوق قرار ذیل دریافت می شود.

$$x_{1,2} = \log_3 5 \pm \sqrt{(\log_3 5)^2 + 4}$$

روش دوم : حل معادلات نمایی با استفاده از روش تغییر متحول

در این روش متحول را طوری تغییر می دهیم تا معادله از حالت نمایی خارج شود. قیمت متحول جدید را دریافت نموده با استفاده از آن قیمت مجهول اصلی را نیز دریافت می نمائیم.

مثال : قیمت x را در معادله $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$ دریافت نمائید؟

حل :

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0 \quad 2^x = u$$

$$u^2 + 2u - 24 = 0 \Rightarrow u_1 = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$u_2 = -6 \Rightarrow 2^x = -6 \quad \text{حل ندارد}$$

بناء تنها جواب این معادله عدد $\{2\}$ است.

مثال : قیمت x را در معادله $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$ دریافت نمائید؟

حل :

$$6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0 ; \quad 2^x = v, \quad 3^x = u$$

$$6 \cdot u^2 - 13u \cdot v + 6 \cdot v^2 = 0$$

اطراف معادله را بر v^2 تقسیم می نمائیم.

$$6\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 13\left(\frac{u}{v}\right) + 6 = 0$$

مجدداً $\frac{u}{v} = z$ فرض می نمائیم.

$$6z^2 - 13z + 6 = 0$$

$$z_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Rightarrow x_1 = -1$$

$$z_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^1 \Rightarrow x_2 = 1$$

روش سوم:

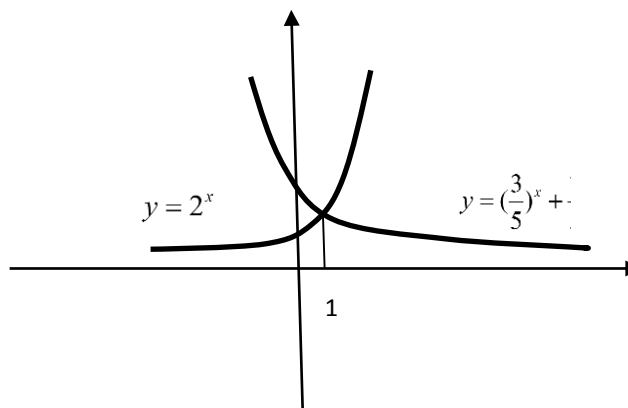
اگر یک معادله به هیچ یک از دو روش قبل حل نشود در این حالت هر طرف معادله را برابر y قرار می دهیم در این صورت دو تابع تشکیل می شود. گراف این دو تابع را ترسیم نموده x نقطه تقاطع جذر معادله می باشد.

مثال: قیمت x را در معادله $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$ دریافت نمائید؟

حل: برای دریافت جذور این معادله از ترسیم گراف استفاده می نمائیم.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$$

$$y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}, \quad y = 2^x$$



با توجه به نقطه تقاطع گراف جذر این معادله عدد $\{1\}$ است.

سوالات حل شده

1- برای کدام مقدار a و b سیستم مقابل بی نهایت حل دارد.

$$\begin{cases} ax + 6y = 4 \\ 2x + by = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{6}{b} = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{a=4} \quad \boxed{b=3}$$

2- برای کدام مقدار پارامتر m سیستم مقابل جواب ندارد.

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{2}{m} \neq \frac{m+1}{3} \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2 \quad \boxed{m=-2}$$

3- اگر $\frac{1}{x^2(x-2)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-2}$ باشد a کدام است؟

$$\frac{1}{x-2} a + bx + \frac{cx^2}{x-2} \quad x=0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

4- اگر $\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$ باشد مقدار b را دریابید.

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{a(x-1)}{x} + b + \frac{c(x-1)}{x-2} \quad x=1 \Rightarrow b = \frac{1}{1(1-2)} = \boxed{-1}$$

5- اگر $x + \frac{1}{x} = a$ و $x > \frac{1}{x}$ باشد مقدار $x^2 - \frac{1}{x^2}$ را دریافت کنید.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow \left|x - \frac{1}{x}\right| = \sqrt{a^2 - 4} \quad , \quad x > \frac{1}{x} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{a^2 - 4}$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = \boxed{a\sqrt{a^2 - 4}}$$

6- اگر $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{z}$ باشد آنگاه $(x + y - z)^3$ را دریافت کنید.

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{y^3} - \sqrt[3]{z^3}\right) = 3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot (-\sqrt[3]{z})$$

$$x + y - z = -3\sqrt[3]{xyz} \quad \boxed{(x + y - z)^3 = -27xyz}$$

7- معادله $(3x+1)^3 + (3-5x)^3 = 8(2-x)^3$ چند جواب دارد؟

$$3(3x+1)(3-5x)(2x-4) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \quad x = \frac{3}{5} \quad x = 2$$

8- اگر $a > b > 0$ باشد و $a^2 - 6ab + b^2 = 0$ باشد قیمت $\frac{a+b}{a-b}$ را دریافت کنید.

$$a^2 - 6ab + b^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 4ab$$

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 \Rightarrow 2(a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}|a-b| = |a+b| \Rightarrow \frac{\sqrt{2}(a-b)}{a-b} = \frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$$

-9 $\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{2}{5}$ باشد قیمت $\frac{x}{x^2+1}$ کدام است؟

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{x} = \frac{25}{4}$$

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4} \quad \frac{x^2+1}{x} = \frac{17}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{x^2+1} = \frac{4}{17}}$$

-10

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{x^3 \sqrt{x} \sqrt{64x}} &= 2 \Rightarrow \sqrt[30]{x^6 x^2 64x} = 2 \\ \sqrt[30]{64x^9} &= 2 \Rightarrow \sqrt[30]{2^6 x^9} = 2 \Rightarrow \sqrt[30]{2^6} \cdot \sqrt[30]{x^9} = 2 \Rightarrow \sqrt[10]{2^2 x^3} = 2 \\ 4x^3 &= 2^{10} \Rightarrow 4x^3 = 4 \cdot 2^8 \Rightarrow x^3 = 2^8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2^8} \Rightarrow \boxed{x = 4\sqrt[3]{4}} \end{aligned}$$

-11

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 2x} &= \sqrt{x} \\ \sqrt{x} \sqrt{x} + \sqrt{x(x-2)} &= \sqrt{x} \\ \sqrt{x} \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2} &= \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{x-2}) = \sqrt{x} \\ \Rightarrow \sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{x-2} - 1) &= 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}$$

چون $x \geq 2$ می باشد لذا $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1$ معادله جواب دیگری ندارد.

-12

$$\begin{aligned} \frac{x}{2 + \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}} &= 1 \quad 2 + \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = 2 + \frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)} \\ &= 2 + \frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{x} = \boxed{\sqrt{x+1}+1} \end{aligned}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{x+1}+1 \Rightarrow x-1 = \sqrt{x+1}$$

$$(x-1)^2 = (x+1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 1$$

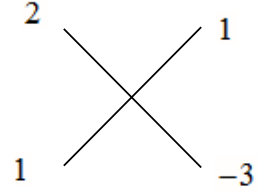
$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

13- معادلات ذیل را حل نمایند.

1) $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \quad x_1 = 4 \quad x_2 = 2$

2) $x^2 - 7x + 6 = 0 \quad a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 6, \quad x_2 = 1$

3) $2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad (2x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$



4) $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

5) $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

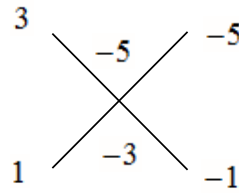
$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

6) $\Rightarrow (x+7)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

7) $x^2 - 10x + 16 = 0 \quad (x-8)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \end{cases}$

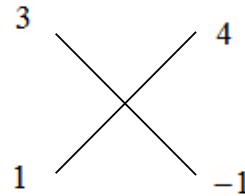
8) $3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow$

$$(3x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$



9) $3x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (3x+4)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$



10) $x^2 + 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -8 \end{cases}$

معادلات جذری

معادلات جذری معادلاتی را گویند که دارای عبارت جذری باشند مانند مثال های ذیل :

$$1) 3 + \sqrt{x-1} = 5$$

$$2) \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = x$$

$$3) \sqrt{5x^2-1} = x$$

حل معادلات جذری :

جهت حل معادلات جذری ابتدا با به توان رساندن اطراف معادله ، معادله را از حالت جذری خارج نموده قیمت جذور را حاصل می نمائیم و در آخر جذور معادله را در معادله اصلی امتحان نموده جذوری که در معادله صدق نماید جذور قابل قبول معادله می باشد.

نکته (1) : برای خارج نمودن معادله از حالت جذری یک جذر را در یک طرف معادله قرار داده اطراف معادله را به توان درجه جذر تنها بالا می بریم این عملیه را تا زمانی تکرار می کنیم تا معادله به طور کل از حالت جذری خارج شود.

مثال : قیمت x را در معادله $\sqrt{x+2} - x = 0$ دریافت نمائید؟

حل :

$$\sqrt{x+2} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} = x \Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = x+2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

تنها عدد $x = 2$ در معادله صدق می کند و عدد $x = -1$ جذر معادله بوده نمی تواند زیرا در معادله صدق نمی کند.

مثال : قیمت x را در معادله $2\sqrt{x} - \sqrt{5x-1} = 0$ دریافت نمائید؟

حل :

$$2\sqrt{x} = \sqrt{5x-1} \Rightarrow 4x = 5x-1 \Rightarrow x = 1$$

جذر $x = 1$ در معادله صدق می نماید بناء جذر قابل قبول معادله است.

نکته (2) : در بعضی حالات معادله جذری را می توان با استفاده از تغییر متحول به معادله ساده تر و یا معادله درجه دوم تبدیل نمود.

مثال : معادله $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$ را حل نمائید.

حل : با فرض $x = t^6$ معادله به یک معادله درجه دوم تبدیل می شود.

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2 \Rightarrow \sqrt[6]{x} = -2$$

$$t_2 = 1 \Rightarrow \sqrt[6]{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

عدد $x = 1$ جذر قابل قبول معادله است.

نکته (3) : در صورتیکه یک جذر با درجه جفت برابر یک عدد منفی قرار داشته باشد این معادله دارای حل نمی باشد زیرا یک جذر با درجه جفت عدد منفی شده نمی تواند.

مثال : قیمت x را در معادله $\sqrt{2x+1}+3=0$ دریافت نمائید.

$$\sqrt{2x+1}+3=0 \Rightarrow \sqrt{2x+1}=-3 \quad \text{حل :}$$

این معادله دارای حل نمی باشد زیرا جذر با درجه جفت دارای حاصل منفی نمی باشد.

نکته (4) : اگر چند جذر با درجه جفت در حالت جمع برابر صفر قرار داشته باشند هر کدام از جذور صفر است.

مثال : معادله $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x+2}=0$ دارای چند جذر است؟

حل : زمانی مجموع این دو جذر صفر است که هر کدام صفر باشد.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x_1=1, \quad x_2=-1$$

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_3=1, \quad x_4=2$$

باید جذری را انتخاب نمائیم که هر دو معادله را همزمان صفر بسازد یعنی جذر مشترک بناءً $x=1$ جذر معادله است.

مثال : در معادله $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$ قیمت x کدام است؟

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6 \Rightarrow \sqrt{x-1}=6-\sqrt{2x+6}$$

اطراف معادله را به توان 2 می رسانیم.

$$x-1=36-12\sqrt{2x+6}+(2x+6) \Rightarrow 12\sqrt{2x+6}=36+2x+6-x+1$$

$$12\sqrt{2x+6}=x+43$$

اطراف معادله را به توان 2 می رسانیم.

$$144(2x+6)=x^2+86x+1849 \Rightarrow x^2+86x-288x+1849-864=0$$

$$x^2-202x+985=0 \Rightarrow x_1=5, \quad x_2=127$$

در صورتیکه قیمت های x را در معادله وضع نمائیم تنها عدد $x=5$ در معادله صدق می کند.

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6 \Rightarrow \sqrt{(5)-1}+\sqrt{2(5)+6}=6 \Rightarrow \sqrt{4}+\sqrt{16}=6 \Rightarrow 2+4=6$$

تنها جذر قابل قبول این معادله عدد $x=5$ است

سوالات معادلات نمایی

1. اگر $16^x = 32$ باشد x کدام است؟

- (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

2. مقدار x در معادله $(\frac{1}{8})^{3x} = 32^{x+1}$ کدام است؟

- (A) $-\frac{14}{5}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $-\frac{5}{14}$

3. مجموعه جوابات معادله $2^{5x+1} = 8^{x^2+1}$ کدام است؟

- (A) 2 (B) $\frac{5}{3}$ (C) صفر (D) $\frac{1}{3}$

4. مقدار A در معادله $\left(\frac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{8}}}\right) = 2^A$ کدام است؟

- (A) 8 (B) 16 (C) $6\sqrt{2}$ (D) $12\sqrt{2}$

5. معادله $9^x + 3^x - 2 = 0$ دارای چند جذر حقیقی است؟

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 0

6. هرگاه $\left. \begin{matrix} 3^{x+1} = y \\ y^{x-1} = 27 \end{matrix} \right\}$ باشد پس x, y برابر است به :

- (A) 54 (B) 27 (C) 18 (D) $\frac{2}{3}$

7. قیمت x را از معادله $2^x + 3 \cdot 2^x + 2^{x+2} = 64$ بدست آورید؟

- (A) 4 (B) 6 (C) 3 (D) 2

8. حل این معادله $3^{x-2} + \sqrt{9^{x-2}} = \frac{2}{27}$ کدام گزینه است؟

- (A) -2 (B) -1 (C) -3 (D) 2

9. مجموع جذور معادله $2^{5x+1} = 8^{x^2+1}$ برابر است با:

- (1) 2 (2) $\frac{5}{3}$ (3) 0 (4) $\frac{1}{3}$

10. معادله $9^x + 3^x - 2 = 0$ چند جذر حقیقی دارد؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 0

11. معادله $xe^{-x} = 1$ چند جذر حقیقی دارد؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) جذر حقیقی ندارد

12) قیمت x از رابطه $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} = 4 \times 16^x$ برابر است با:

- (1) $1/3$ (2) $1/6$ (3) 2 (4) $2/3$

13) جذور معادله $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 4$ عبارت است از:

- (1) ∓ 2 (2) $1, 2$ (3) ∓ 1 (4) $-1, 2$

14) جواب معادله $3^{2x} - 8(3^x) + 15 = 0$ عبارت است از:

- (1) $\log_5^3$ (2) $\log_3^5$ (3) $\log_3^4$ (4) $\log_4^3$

15) قیمت x را از معادله $2^{2x+2} + 2^{2x} = 320$ بدست آورید:

- (1) $x = 2$ (2) $x = 3$ (3) $x = 5$ (4) $x = 4$

16) در معادله $3^{2x-6} = \frac{1}{9}$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17) در معادله $2^{x+4} + 2^{x+1} + 2^x = 152$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

18) مقدار x در معادله $\left(\frac{0.048}{0.012}\right)^{x-2} = \left(\frac{0.06}{0.03}\right)^{x+1}$ عبارت است از:

- (1) 5 (2) 3 (3) 4 (4) 2

19) کدام x در معادله $(243)^{x-1} = 81$ صدق می کند؟

- (1) $8/4$ (2) $7/4$ (3) $9/4$ (4) $10/4$

20) قیمت x در معادله $\frac{3^{2x-5}}{3^{4-2x}} = 27$ عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

21) قیمت x در معادله $2^{3x+5} \cdot 4^{2x+1} \cdot 8^{x+2} \cdot 16^x = 64$ عبارت است از:

- (1) -1 (2) $-1/2$ (3) $-1/3$ (4) $-1/4$

(22) اگر $9^{2x+1} + 8 \cdot 3^{4x} = 153$ باشد x برابر است با:

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{7}{2}$

(23) x در معادله $\frac{9^{2-x}}{81^{4+x}} : \frac{3^{x-3}}{27^{x+1}} = 81$ عبارت است از:

- (1) $\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{5}{6}$

(24) اگر $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-5} = 5^{-x+1}$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 2 (2) -3 (3) 4 (4) 5

(25) در معادله $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 351$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(26) در معادله $3^{x-1} + \frac{2}{3^{1-x}} = 243$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 4 (2) 3 (3) 5 (4) 6

(27) در معادله $\frac{30}{2^{2-3x}} + 2^{3x-1} = 8$ قیمت x را دریافت کنید.

- (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 0

(28) قیمت x را از معادله $\frac{2^x}{3^{-x} + 3^{-x} + 3^{-x}} = 12$ دریافت کنید.

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(29) قیمت x را از معادله $4^x + 4^x + 4^x + 4^x + 4^x - 320 = 0$ دریافت کنید.

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(30) قیمت x در معادله $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ مساوی است به:

- (1) 1 (2) 2 (3) -2 (4) -1

(31) قیمت x در معادله $8^{x+2} = 16^{2x-1}$ عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

32) در معادله $(27)^{x-5} - (81)^{2x-1} = 0$ قیمت x عبارت است از:

- (1) $\frac{11}{5}$ (2) $-\frac{11}{5}$ (3) $\frac{12}{5}$ (4) $-\frac{12}{5}$

33) در معادله $2^{x+3} - 2^x - 28 = 0$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

34) در معادله $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3-x} - \frac{8}{27} = 0$ قیمت x مساوی است به:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

35) در معادله $3^x - 2^x = 0$ قیمت x مساوی است به:

- (1) 1 (2) -2 (3) 0 (4) 5

36) در سیستم $\begin{cases} 2^{x+y} = 16 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$ قیمت‌های x و y عبارت است از:

- (1) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=9 \\ y=2 \end{cases}$

37) در سیستم $\begin{cases} 3^x \cdot 3^{-3y} - 3^{4-4y} = 0 \\ 2^x \cdot 2^{-y} - 4 = 0 \end{cases}$ قیمت x و y عبارت است از:

- (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

38) در معادله $2^{x+1} - 2^x - 8 = 0$ قیمت x مساوی است به:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

39) قیمت x در معادله $3^{x+2} - 3^{x+1} - 54 = 0$ مساوی است به:

- (1) 1 (2) 5 (3) 7 (4) 2

40) در معادله $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-3} - \left(\frac{5}{4}\right)^{x-3} = 0$ قیمت x مساوی است به:

- (1) 1 (2) 5 (3) 4 (4) 2

41) در معادله $2x+1 = 3^x$ قیمت‌های x مساوی است به:

- (1) 0,4 (2) 0,3 (3) 0,1 (4) 5,3

(42) در معادله $5 \cdot 3^{x-1} + 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 78$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 1 (2) 4 (3) 5 (4) 2

(43) قیمت x در معادله $27^x - (3^x)^5 \cdot 3 = 0$ مساوی است به:

- (1) 1 (2) 3 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{1}{2}$

(44) مقدار x در معادله $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} - 1 = 0$ مساوی است به:

- (1) $x = 1$ (2) $x = 2$ (3) $x = 3$ (4) $x = 4$

(45) در معادله $\frac{(2^x)^7}{256} - 16 \cdot 2^x = 0$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(46) قیمت x در معادله $4^{x+1} + 4^x = 320$ کدام است؟

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 8

(47) در معادله $2^{3x-4} - 4^{x-3} = 0$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 2 (2) 3 (3) -2 (4) -1

(48) قیمت x در معادله $3^{x+1} + 3^x - 108 = 0$ کدام است؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(49) قیمت x در معادله $2^{2x+2} + 2^{2x} = 320$ عبارت است از:

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

(50) در معادله $3^{2x-6} - \frac{1}{9} = 0$ قیمت x عبارت است از:

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

سوالات عمومی کانکورهای گذشته

1. حل معادله $\frac{2x-4}{3x^2-x+4}=0$ عبارت است از:

- (A) $x = -2$ (B) $x = 3$ (C) $x = -3$ (D) $x = 2$

2. ست جذور معادله $x^2 - 2x - 3 = 0$ کدام است؟

- (A) $\{1, 4\}$ (B) $\{1, 3\}$ (C) $\{-1, 3\}$ (D) $\{-1, -3\}$

3. جذور معادله $(x-2)(3)^{x-1} = 0$ کدام است؟

- (A) $x = 0$ (B) $x = 1$ (C) $x = 2$ (D) $x = -2$

4. قیمت $x - y$ در معادله $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{4y^2 + 24y + 36} = 0$ کدام است؟

- (A) -7 (B) -3 (C) 6 (D) 7

5. قیمت x در سیستم معادله
عبارت است از :
$$\begin{cases} y - \frac{3y}{x} = 4 \\ 1 + \frac{x}{y} = 5 \end{cases}$$

- (A) 12 (B) 16 (C) 19 (D) 17

6. شرط لازمی تقاطع گراف $y = ax^2 + bx + c$ با محور x ها عبارت است از :

- (A) $b^2 \neq 4ac$ (B) $b^2 + 4ac < 0$ (C) $b^2 - 4ac > 0$ (D) $b^2 - 4ac < 0$

7. قیمت m در معادله $2^x + 2^{x+1} - m \cdot 2^{x+2} = 0$ عبارت است از :

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

8. قیمت x در معادله $\frac{\sqrt[3]{4^{x+1}}}{\sqrt{8^{x-1}}} = 16$ مساوی است به :

- (A) $\frac{-13}{5}$ (B) $\frac{-11}{5}$ (C) $\frac{-9}{5}$ (D) $\frac{11}{5}$

9. به کدام قیمت های m معادله پارامتریک $x^2 - 2mx - 3m = 0$ دارای حل است؟

- (A) $\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = -3 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = -2 \end{cases}$

10. در پولینوم $p(x+3) = 2x^3 + ax^2 + x + 1$ ، $p(4) = 10$ است پس قیمت a مساوی است به :

- (A) -6 (B) -2 (C) 2 (D) 6

11. ست حل معادله $|3x-2| = 2x-1$ کدام است؟

- (A) $\{1\}$ (B) $\{\frac{3}{5}\}$ (C) $\{1, \frac{3}{5}\}$ (D) $\{0, 1\}$

12. قیمت مجموع $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ عبارت است از :

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \quad (B) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{2n} \quad (A)$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n+1} \quad (D) \quad 2^n \quad (C) \quad (B)$$

13. با در نظر داشت $x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0$ مقدار $|x - y|$ مساوی است به :

$$-3 \quad (A) \quad -1 \quad (B) \quad 1 \quad (C) \quad 2 \quad (D)$$

14. ست جذور معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ کدام است؟

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases} \quad (A) \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad (B) \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad (C) \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases} \quad (D)$$

15. معادله محور تناظر پارابولای $y^2 = 8y - 6x - 34$ کدام است؟

$$y = 4 \quad (A) \quad y = -4 \quad (B) \quad y = 3 \quad (C) \quad y = -3 \quad (D)$$

16. با توجه به سیستم $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ مقدار مساوی $x^3 + y^3$ است به :

$$36 \quad (A) \quad 28 \quad (B) \quad 44 \quad (C) \quad 48 \quad (D)$$

17. اگر x_1 و x_2 جذور حقیقی $x^2 + (p-1)x + q = 0$ باشد ضرب جذور معادله عبارت است از :

$$p \quad (A) \quad -q \quad (B) \quad -(p-1) \quad (C) \quad q \quad (D)$$

18. معادله $\sqrt{2x+3} + 4 = 0$ چند حل دارد؟

$$(A) \text{ یک حل} \quad (B) \text{ دو حل} \quad (C) \text{ بی نهایت حل} \quad (D) \text{ حل ندارد}$$

19. سیستم معادلات خطی $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$ چند حل دارد؟

$$(A) \text{ دو حل} \quad (B) \text{ یک حل} \quad (C) \text{ حل ندارد} \quad (D) \text{ بی نهایت حل}$$

20. قیمت x در معادله نمایی $15^{12} \cdot 625^x = 3^{12}$ مساوی است به :

$$x = -6 \quad (A) \quad x = -5 \quad (B) \quad x = -3 \quad (C) \quad x = 3 \quad (D)$$

21. قیمت m در معادله $x^2 - 3mx - 3m + 1 = 0$ که $2x_1 + x_2 = 1$ باشد مساوی است به :

$$\frac{1}{2} \quad (A) \quad \frac{-1}{2} \quad (B) \quad \frac{1}{3} \quad (C) \quad \frac{-1}{3} \quad (D)$$

22. هر گاه $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ و $x_2 = 1 - \sqrt{5}$ باشد معادله آن عبارت است از :

$$x^2 + 3x + 6 = 0 \quad (A) \quad x^2 + 3x + 4 = 0 \quad (B) \quad x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (C) \quad x^2 - 2x + 4 = 0 \quad (D)$$

23. اگر $-\frac{b}{2a} = 2$ باشد قیمت m در تابع $y = (m+1)x^2 - 2mx + 4$ مساوی است به :

$$m = 5 \quad (A) \quad m = -5 \quad (B) \quad m = 2 \quad (C) \quad m = -2 \quad (D)$$

24. حل معادله $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x}{x+4}$ عبارت است از :

$$x = -4 \text{ (D)} \quad x = -2 \text{ (C)} \quad x = 4 \text{ (B)} \quad x = 2 \text{ (A)}$$

25. در مساوات $\frac{2x^2+6x-4}{x(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{-1}{x}$ قیمت B کدام است؟

$$-3 \text{ (D)} \quad 3 \text{ (C)} \quad -\frac{1}{3} \text{ (B)} \quad \frac{1}{3} \text{ (A)}$$

26. قیمت y در سیستم معادلات $\begin{cases} 4^{x+2y} = 8 \\ 8^{x+y} = 16 \end{cases}$ کدام است؟

$$4/5 \text{ (D)} \quad 5/6 \text{ (C)} \quad 2/3 \text{ (B)} \quad 1/6 \text{ (A)}$$

27. قیمت x در افاده $\sqrt{\frac{30}{2^{2-3x}}} + 2^{3x-1} = 8$ عبارت است از :

$$4 \text{ (D)} \quad 3 \text{ (C)} \quad 2 \text{ (B)} \quad 1 \text{ (A)}$$

28. حل معادله $\frac{1}{2}x - \frac{x}{4} = \frac{3}{2} - x$ عبارت است از :

$$7/8 \text{ (D)} \quad 2/3 \text{ (C)} \quad 4/5 \text{ (B)} \quad 6/5 \text{ (A)}$$

29. حل معادله $(x-1)(x+1) = (x-3)^2$ عبارت است از :

$$x = -\frac{3}{5} \text{ (D)} \quad x = -\frac{5}{3} \text{ (C)} \quad x = \frac{3}{5} \text{ (B)} \quad x = \frac{5}{3} \text{ (A)}$$

30. سیستم معادلات $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=-3 \end{cases}$ چند حل دارد؟

$$(A) \text{ دو حل} \quad (B) \text{ یک حل} \quad (C) \text{ حل ندارد} \quad (D) \text{ بی نهایت حل}$$

31. معادله که جذور آن $(2+\sqrt{2})$ و $(2-\sqrt{2})$ باشد عبارت است از :

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \text{ (D)} \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \text{ (C)} \quad x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 \text{ (B)} \quad x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 \text{ (A)}$$

32. جذور معادله $\frac{1}{125} = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{5}}\right)^x$ مساوی است به :

$$x = -15 \text{ (D)} \quad x = -10 \text{ (C)} \quad x = 10 \text{ (B)} \quad x = 15 \text{ (A)}$$

33. حل سیستم معادلات $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x \end{cases}$ عبارت است از :

$$(4, 4) \text{ (D)} \quad (4, 2) \text{ (C)} \quad (2, 4) \text{ (B)} \quad (2, 2) \text{ (A)}$$

34. تفاضل مربعات جذور معادله $x^2 - 3x + m = 2$ مساوی به 6 می باشد قیمت m عبارت است از :

$$\frac{13}{4} \text{ (D)} \quad \frac{6}{5} \text{ (C)} \quad \frac{3}{4} \text{ (B)} \quad -4 \text{ (A)}$$

35. حاصل جمع جذور معادله $|x+3| + 2 = 5$ کدام است؟

$$0 \text{ (D)} \quad -3 \text{ (C)} \quad -6 \text{ (B)} \quad -10 \text{ (A)}$$

36. حل سیستم معادله $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ عبارت است به :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ (A)} & \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ (B)} & \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \text{ (C)} & \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ (D)} \end{aligned}$$

37. معادله $3x^2 - x + c = 0$ دارای دو جذر حقیقی مختلف می باشد اگر :

$$1-12c < 0 \text{ (A)} \quad 1-12c > 0 \text{ (B)} \quad 1-12c = 0 \text{ (C)} \quad 1-12c \neq 0 \text{ (D)}$$

38. اگر $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ و $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ باشد معادله آن کدام است؟

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \text{ (A)} \quad x^2 - x - 2 = 0 \text{ (B)} \quad x^2 - x - 1 = 0 \text{ (C)} \quad x^2 - 2x = 0 \text{ (D)}$$

39. قیمت m در معادله $2x^2 - (m-1)x - (4-m) = 0$ در صورتیکه $x_1 = \frac{1}{x_2}$ باشد کدام است؟

$$m = -1 \text{ (A)} \quad m = 2 \text{ (B)} \quad m = 4 \text{ (C)} \quad m = 6 \text{ (D)}$$

40. در یک سیستم معادلات خطی سه مجهوله قیمت دیترمینانت ضرایب $D = 3$ و قیمت دیترمینانت های

مجهولات به ترتیب $N_x = 12$ ، $N_y = -15$ و $N_z = -11$ می باشد حل آن عبارت است از :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x=12 \\ y=-15 \\ z=-11 \end{cases} \text{ (A)} & \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=-\frac{11}{3} \end{cases} \text{ (B)} & \begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \\ z=-\frac{11}{3} \end{cases} \text{ (C)} & \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=\frac{11}{3} \end{cases} \text{ (D)} \end{aligned}$$

41. جذور معادله $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^x$ کدام است؟

$$x = 15 \text{ (A)} \quad x = 10 \text{ (B)} \quad x = -10 \text{ (C)} \quad x = -15 \text{ (D)}$$

42. اگر سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول حل نداشته باشد مستقیم های مربوطه آنها با همدیگر چه

رابطه ای دارند :

$$\text{(A) متقاطع اند} \quad \text{(B) منطبق اند} \quad \text{(C) موازی اند} \quad \text{(D) عمود اند}$$

43. حاصل $x_1 \cdot x_2$ در معادله $|x-4| + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = 12$ کدام است؟

$$-25 \text{ (A)} \quad -20 \text{ (B)} \quad -15 \text{ (C)} \quad -10 \text{ (D)}$$

44. قیمت x در معادله $\frac{1,44}{10^{x+1}} = 0,000144$ کدام است؟

$$x = -3 \text{ (A)} \quad x = 3 \text{ (B)} \quad x = 4 \text{ (C)} \quad x = -4 \text{ (D)}$$

45. مقدار x در معادله $\sqrt{x+1}\sqrt{81} = 3$ کدام است؟

$$2 \text{ (A)} \quad 3 \text{ (B)} \quad 4 \text{ (C)} \quad \pm\sqrt{5} \text{ (D)}$$

46. قیمت x در معادله $12 - 2x - 6\sqrt{2} + \frac{x}{6} + 2x - 12 + 5\sqrt{2} = 0$ کدام است؟

$$6\sqrt{2} \text{ (A)} \quad -6\sqrt{2} \text{ (B)} \quad 5\sqrt{2} \text{ (C)} \quad -5\sqrt{2} \text{ (D)}$$

47. قیمت x در معادله $3ax - b = bx - 3a$ عبارت است از :

(A) $-a$ (B) -1 (C) 1 (D) a

48. اگر در معادله $\frac{x-10}{x^2+x} - \frac{x}{x+1} + \frac{4}{x} = 0$ دارای دو جذر حقیقی باشد حاصل ضرب جذور آن عبارت است از :

(A) 6 (B) -6 (C) 4 (D) 5

49. $x^{2009} = -1$ باشد پس قیمت $|x-3| + |x+2| + |x+3| + |x-2|$ کدام است؟

(A) 10 (B) 8 (C) 7 (D) 6

50. حل سیستم
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{8}{x} + \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$$
 عبارت است از :

(A) $(2, 4)$ (B) $(4, 2)$ (C) $(-4, -2)$ (D) $(-4, 2)$

51. معادله $(3-x)(3-\frac{4}{x}) = 1$ چند حل دارد؟

(A) یک حل حقیقی (B) دو حل حقیقی (C) حل ندارد (D) سه حل

52. حل معادله $x - \sqrt{2} = x^2 - 2$ عبارت است از :

(A) 2 (B) $1 + \sqrt{2}$ (C) $1 - \sqrt{2}$ (D) -2

53. اگر معادله $\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{2x+1}{x}\right) - 3 = 0$ دارای دو جذر باشد حاصل ضرب جذور عبارت است از :

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) 1 (D) 5

54. سیستم معادلات خطی دو مجهوله یی که مستقیم های مربوطه آن متقاطع باشند چند حل دارد؟

(A) دو حل (B) یک حل (C) حل ندارد (D) بینهایت

55. قیمت x در معادله $2^x - 2^{x+1} + 2^{x+2} = 384$ مساوی است به :

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7

56. قیمت x در معادله $1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}}} = 2$ کدام است؟

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

57. افاده $x^2 - 3x + 2$ برای تمام قیمت های متحول x دارای چند تغییر علامه است؟

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) تغییر علامه ندارد

58. اگر $x^2 - x - 2 = 0$ باشد آنگاه قیمت عددی $x^4 - 2x^3 + x^2$ عبارت است از :

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

59. حاصل جمع جذور معادله $x + \frac{2}{x} - 3 = 0$ عبارت است از :

- (A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 2

60. حل مثبت معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x+1} = 1$ عبارت است از :

- (A) $1 + \sqrt{3}$ (B) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

61. اگر معادله $(x+2)^{2x} = (9x^2 + 12x + 4)^x$ دارای دو جذر حقیقی باشد حاصل جمع جذور عبارت است از :

- (A) $-\frac{5}{4}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) -1 (D) 10

62. اگر معادله $mx^2 - (2m^2 + 1)x + 2m = 0$ دو جذر داشته باشد در آن صورت حاصل جمع جذور عبارت است از :

- (A) $2m^2 + 1$ (B) $2m - \frac{1}{m}$ (C) $\frac{2m^2 + 1}{m}$ (D) $\frac{m^2 + 1}{m}$

63. کدام یک از قیمت های X در معادله $\sqrt{5x-1} + x - 5 = 0$ صدق می کند؟

- (A) $x = 1$ (B) $x = -1$ (C) $x = 2$ (D) $x = -2$

64. اگر سیستم معادلات خطی دو مجهوله $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ حل نداشته باشد کدام رابطه درست است؟

- (A) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (B) $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (C) $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (D) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

65. ست حل معادله $|5-x| + x = 7$ کدام است؟

- (A) {4} (B) {7} (C) {6, 7} (D) {6}

66. حل معادله $\frac{1}{2^{x-1}} + \frac{6}{2^x} + \frac{2}{2^{x-2}} = 64$ عبارت است از :

- (A) $x = 2$ (B) $x = -2$ (C) $x = -4$ (D) $x = 4$

67. معادله $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$ چند حل دارد؟

- (A) دو جذر (B) یک جذر (C) سه جذر (D) جذر ندارد

68. حل معادله $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 25$ کدام است؟

- (A) 24 (B) 18 (C) 15 (D) 12

69. حل سیستم معادلات $\begin{cases} 10x + 5y = 15 \\ -x + 4y = 21 \end{cases}$ عبارت است از :

- (A) (5, -1) (B) (2, -1) (C) (-1, 5) (D) (-1, 2)

70. اگر $x_1 = \frac{1}{2}$ و $x_2 = -\frac{3}{2}$ جذور حقیقی معادله باشند معادله مذکور عبارت است از :

$$4x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ (D)} \quad 4x^2 - 4x - 3 = 0 \text{ (C)} \quad 4x^2 + 4x + 3 = 0 \text{ (B)} \quad 4x^2 + 4x - 3 = 0 \text{ (A)}$$

71. سیستم معادلات $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = \frac{8}{3} \end{cases}$ چند حل دارد؟

(A) یک حل (B) دو حل (C) لایتناهی (D) حل ندارد

72. معادله $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$ چند جذر دارد؟

(A) دو جذر (B) یک جذر (C) سه جذر (D) جذر ندارد

73. سیستم معادلات $\begin{cases} x - 2y + 5z = 3 \\ x + 4y + 5z = 1 \\ 3x - 6y + 15z = 2 \end{cases}$ چند حل دارد؟

(A) یک حل (B) دو حل (C) حل ندارد (D) بینهایت

74. اگر x_1 و x_2 جذور معادله $2x^2 - 6x + m = 0$ باشد پس حاصل جمع جذور عبارت است از :

(A) 6 (B) 3 (C) -6 (D) $\frac{3}{2}$

75. در معادله $x^2 + (m+1)x + m = 0$ قیمت m چند شود تا معادله دو جذر مضاعف داشته باشد؟

(A) $m=0$ (B) $m=1$ (C) $m=-1$ (D) تمام اعداد حقیقی

76. در معادله $(\sqrt{2})^{x+6} - (\frac{2}{\sqrt{2}})^{2x} - 16 = 0$ قیمت x عبارت است از :

(A) $x=4$ (B) $x=2$ (C) $x=1$ (D) $x=\sqrt{2}$

77. حل معادله $\frac{x-2}{x} = \frac{2x+2}{x+2}$ عبارت است از :

(A) $x=-2$ (B) $x=2$ (C) $x=0$ (D) حل ندارد

78. نقطه تقاطع مستقیم های $y=2x$ و $y=x+1$ عبارت است از :

(A) (0, 4) (B) (0, -3) (C) (1, 2) (D) (-1, -5)

79. اگر x_1 و x_2 جذور معادله $x^2 + px + q = 0$ باشد حاصل ضرب مربعات جذور معادله عبارت است از :

(A) p^2 (B) q^2 (C) $\frac{q^2}{p^2}$ (D) $\frac{q}{p}$

80. کدام یک از قیمت های x در معادله $\sqrt{2x+3} = x$ صدق می کند؟

(A) $x=5$ (B) $x=4$ (C) $x=3$ (D) $x=2$

81. اگر معادله $2x^2 + px + 6 = 0$ دو جذر حقیقی داشته باشد در آن صورت حاصل ضرب جذور عبارت است از :

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) p

82. سیستم معادلات $\begin{cases} x-2y=5 \\ 3x-6y=15 \end{cases}$ چند حل دارد؟

- (A) یک حل (B) دو حل (C) حل ندارد (D) بینهایت

83. ست حل معادله $(x+1)^2 = 4$ عبارت است از :

- (A) $\{1, 3\}$ (B) $\{-1, 3\}$ (C) $\{1, -3\}$ (D) $\{-1, -3\}$

84. جذور معادله $|5x-10|=5$ عبارت است از :

- (A) $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -5 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

85. هر گاه در معادله $b > 0$ و $x + b\sqrt{x} + c = 0$ عدد $b^2 - 4c$ صفر باشد معادله چند جذر دارد؟

- (A) جذر ندارد (B) دو جذر مختلف (C) سه جذر (D) یک جذر

86. معادله $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ از محور x ها فاصله ذیل را دارد؟

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

87. حل معادله $(x-1)(x+1) - x^2 + 2x + 4 = 0$ عبارت است از :

- (A) $x = \frac{2}{3}$ (B) $x = -\frac{2}{3}$ (C) $x = \frac{3}{2}$ (D) $x = -\frac{3}{2}$

88. اگر معادله $px^2 + (p+1)x + q = 0$ دارای دو جذر حقیقی باشد حاصل جمع جذور عبارت است از :

- (A) q (B) $\frac{q}{p}$ (C) $p+1$ (D) $-\frac{p+1}{p}$

89. سیستم معادلات $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x-6y=7 \end{cases}$ چند حل دارد؟

- (A) دو حل (B) یک حل (C) حل ندارد (D) بینهایت حل

90. افاده $3x^2 - 2x + 5$ برای تمام قیمت های متحول x دارای چند تغییر علامه است؟

- (A) 1 تحول علامه (B) 2 تحول علامه (C) بینهایت (D) تحول علامه ندارد

91. معادله $x^2 - 2x + 4 = 0$ به کدام قیمت های x مثبت است؟

- (A) $x > 0$ (B) $x < 0$ (C) $2 < x < 1$ (D) تمام اعداد حقیقی

92. حل سیستم معادلات $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ x+\frac{1}{2}y=2 \end{cases}$ کدام است؟

- (A) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

93. ست جذور معادله $x^2 - 4x = 0$ مساوی است؟

- (A) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

94. در معادله نمایی $2^x = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$ قیمت X مساوی است به :

(A) $x = \frac{5}{3}$ (B) $x = \frac{2}{3}$ (C) $x = -\frac{5}{3}$ (D) $x = -\frac{3}{5}$

95. کدام قیمت X در معادله $\sqrt{2x-1} + x = 8$ صدق می کند؟

(A) $x = 5$ (B) $x = 4$ (C) $x = 3$ (D) $x = 2$

96. نقطه مشترک مستقیم های $y = 2x - 6$ و $y = x - 5$ عبارت است از :

(A) $(0, -4)$ (B) $(0, -3)$ (C) $(1, -4)$ (D) $(-1, -5)$

97. حل معادله $3^{x+1} = \frac{1}{27}$ عبارت است از :

(A) $x = 4$ (B) $x = -4$ (C) $x = 3$ (D) $x = -3$

98. در معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ حاصل جمع مربعات جذور عبارت است از :

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

99. در معادله نمایی $5^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ قیمت X مساوی است به :

(A) $x = \frac{3}{2}$ (B) $x = -\frac{3}{2}$ (C) $x = \frac{2}{3}$ (D) $x = -\frac{2}{3}$

100. حل معادله $\frac{2x-1}{4x+1} = \frac{1}{3}$ مساوی است به :

(A) $x = 1$ (B) $x = -1$ (C) $x = 2$ (D) $x = -2$

101. در سیستم معادلات $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 11 \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 24 \end{cases}$ مقدار $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ عبارت است از :

(A) 5 (B) 6 (C) $27/4$ (D) 7

102. قیمت X در معادله $\frac{3 \cdot 2^{x-1} - 3 \cdot 2^x + 2^{x+1}}{2^x} = 2^{x-1}$ مساوی است به :

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

103. قیمت X در سیستم معادلات $\begin{cases} \frac{x+y-4}{4} = \frac{5}{4} \\ \frac{x-y+3}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$ مساوی است به :

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5

104. قیمت X در معادله $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+2x+1} = 0$ عبارت است از :

(A) -8 (B) -4 (C) -2 (D) 2

105. قیمت x در معادله $\sqrt{3x+1}-5=0$ عبارت است از :
 (A) $x=-7$ (B) $x=-8$ (C) $x=7$ (D) $x=8$
106. پارامتر m در معادله $4x-3my+1=0$ که از نقطه $(1,5)$ بگذرد عبارت است از:
 (A) $m=3$ (B) $m=-3$ (C) $m=\frac{1}{3}$ (D) $m=-\frac{1}{3}$
107. جذور معادله $x^2-8x+25=0$ بادر نظر داشت Δ (دلتا) در کدام ست اعداد صدق می کند؟
 (A) $x_1, x_2 \in IR$ (B) $x_1, x_2 \notin C$ (C) $x_1, x_2 \in C$ (D) $x_1 \in IR \cap x_2 \in C$
108. ست حل معادله $|4-5x|=|8-x|$ عبارت است از :
 (A) $\{-4,1\}$ (B) $\{1,-2\}$ (C) $\{-1,2\}$ (D) $\{-1,-2\}$
109. اگر حاصل تقسیم a, b بر 37 به ترتیب 15 و 29 باشد حاصل تقسیم $b-a$ بر 37 عبارت است از :
 (A) 14 (B) 7 (C) 23 (D) 28
110. ست حل معادله $2x^2-8=0$ عبارت است از :
 (A) $\{-2,2\}$ (B) $\{-1,1\}$ (C) $\{-2,1\}$ (D) $\{2,-1\}$
111. ست حل معادله $2x^2+7x+6=0$ عبارت است از :
 (A) $\{2, \frac{3}{2}\}$ (B) $\{-2, \frac{3}{2}\}$ (C) $\{-2, -\frac{3}{2}\}$ (D) $\{2, -\frac{3}{2}\}$
112. معادله $2x^2-5x-6=0$ چند تحول علامه دارد؟
 (A) دو (B) یک (C) سه (D) چهار
113. معادله $-3x^2-6x-12=0$ چند تحول علامه دارد؟
 (A) دو (B) یک (C) تحول ندارد (D) چهار
114. معادله $5x^2+11x+16=0$ چند تحول علامه دارد؟
 (A) دو (B) ندارد (C) سه (D) بینهایت
115. هرگاه معادله درجه دوم دو تحول علامه داشته باشد پس علامه جذور آن :
 (A) مثبت اند (B) منفی اند (C) مثبت و منفی اند (D) هیچکدام
116. هرگاه معادله درجه دوم تحول علامه نداشته باشد پس علامه جذور آن :
 (A) مثبت اند (B) منفی اند (C) مثبت ندارند (D) مثبت و منفی اند
117. حاصل جمع دو عدد 16 و حاصل ضرب آن ها 63 است آن اعداد عبارت ند از :
 (A) $\{9,7\}$ (B) $\{8,7\}$ (C) $\{9,8\}$ (D) $\{9,6\}$
118. حاصل جمع دو عدد 14 و حاصل ضرب شان 45 است اعداد عبارت اند از :
 (A) $\{8,9\}$ (B) $\{9,5\}$ (C) $\{5,8\}$ (D) $\{9,9\}$

119. حاصل ضرب دو عدد مسلسل 483 است آن اعداد عبارت اند از :

(A) {23, 21} (B) {23, 25} (C) {19, 21} (D) {17, 19}

120. هرگاه در معادله درجه دوم $b^2 - 4ac = 0$ باشد منحنی $y = ax^2 + bx + c$ با :

(A) محور X ها مماس است (B) محور Y ها مماس است

(B) (C) محور X ها را قطع می کند (D) محور Y ها را قطع می کند

121. هرگاه در معادله درجه دوم $b^2 - 4ac < 0$ باشد پارابول :

(A) محور X ها را قطع نمی کند (B) محور X ها را قطع می کند

(B) (C) با محور Y ها موازی است (D) با محور X ها موازی است

122. نقطه تقاطع با محور X ها زمانی امکان پذیر است؟

(A) محور Y صفر شود (B) هر دو محورات صفر شوند

(B) (C) محور X صفر شود (D) هر دو محورات صفر نشوند

123. کدام عدد حل معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$ است؟

(A) 9 (B) 4 (C) 2 (D) 1

124. حل سیستم معادلات $\begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ کدام است؟

(A) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

125. جوابات سیستم دو معادله دو مجهول $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ عبارت است از :

(A) $\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \\ y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1b_2 - b_1a_2} \\ y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x = \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{c_2b_1 - b_2c_1} \\ y = \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{a_2c_1 - a_1c_2} \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{c_2b_1 - b_2c_1} \\ y = \frac{a_2b_1 - b_2a_2}{a_2c_1 - a_1b_2} \end{cases}$

126. سیستم معادلات $\begin{cases} mx - y = 6 \\ -4x + my = 2 \end{cases}$ برای کدام قیمت m جواب ندارد؟

(A) $m = \pm 3$ (B) $m = \pm 4$ (C) $m = \pm 2$ (D) $m = \pm 1$

127. حل سیستم معادله $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x + y + z = 12 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$ عبارت است از :

(A) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

کلید سوالات عمومی کانکورهای گذشته

شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب
1	4	33	2	65	4	97	3
2	3	34	2	66	4	98	2
3	3	35	2	67	2	99	4
4	4	36	1	68	2	100	1
5	3	37	2	69	4	101	3
6	3	38	1	70	3	102	3
7	4	39	4	71	1	103	2
8	4	40	2	72	1	104	4
9	2	41	1	73	2	105	3
10	4	42	3	74	3	106	4
11	3	43	2	75	2	107	3
12	4	44	2	76	2	108	3
13	4	45	4	77	1	109	3
14	2	46	1	78	4	110	1
15	1	47	2	79	3	111	1
16	2	48	1	80	2	112	3
17	4	49	1	81	3	113	2
18	4	50	2	82	1	114	3
19	4	51		83	4	115	2
20	3	52	1	84	3	116	1
21	3	53	3	85	4	117	2
22	3	54	2	86	1	118	1
23	4	55	2	87	1	119	2
24	2	56	4	88	4	120	1
25	3	57	2	89	4	121	1
26	1	58	2	90	3	122	1
27	1	59	3	91	2	123	1
28	1	60	3	92	4	124	2
29	1	61	2	93	4	125	1
30	2	62	3	94	4	126	
31	3	63	3	95	3	127	3
32	4	64	3	96	1	128	1

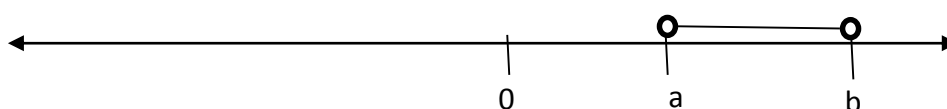
انتروال

تعریف (1) : در صورتیکه a, b دو عدد حقیقی باشند طوری که $a < b$ باشد.

(1) انتروال باز : مجموعه اعداد حقیقی x که از a بزرگتر و از b کوچکتر باشد توسط سمبول (a, b) نمایش داده می شود و آنرا انتروال باز می نامند و به صورت زیر نمایش می دهند.

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

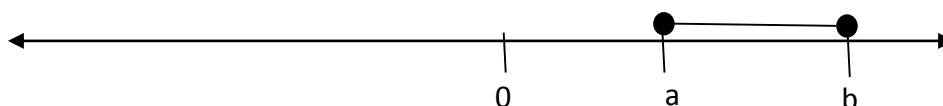
نمایش این انتروال که یک مجموعه محدود است به صورت ذیل است.



انتروال های دیگر به قسم ذیل نمایش داده می شود.

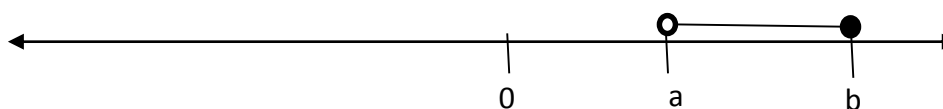
(2) انتروال بسته :

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$



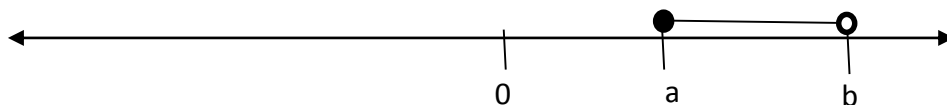
(3) انتروال نیمه باز :

$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$



(4) انتروال نیمه بسته :

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

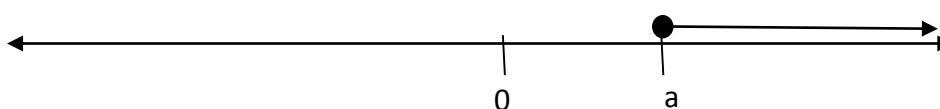


تعریف (2) : فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد مجموعه همه اعداد حقیقی x که بزرگتر و یا مساوی a می

باشند با نماد $[a, +\infty)$ نمایش داده می شود و آنرا در یک انتروال نامحدود از اعداد حقیقی مینامند به صورت

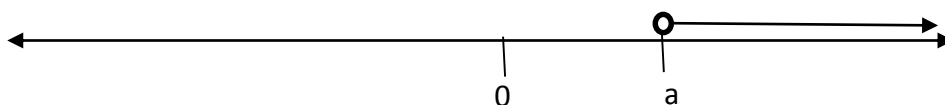
ذیل نمایش می دهند.

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

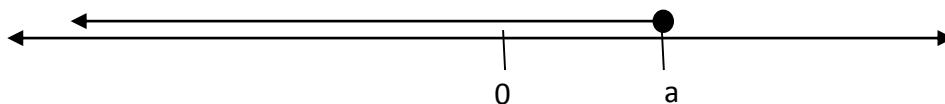


دیگر انتروال ها به صورتهای ذیل تعریف می شود.

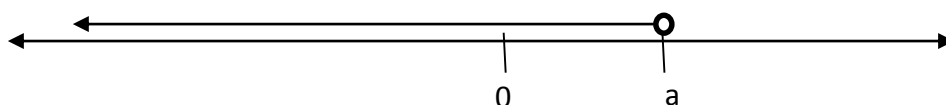
$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\} \quad (1)$$



$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\} \quad (2)$$



$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\} \quad (3)$$



مثال : فاصله $(-\infty, -2)$ را به وسیله ست نمایش دهید.

$$(-\infty, -2) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -2\}$$

مثال : رابطه $[-2, 3) \cap (1, 4)$ را ساده نمائید؟

$$[-2, 3) \cap (1, 4) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 3\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 4\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 3\} = (1, 3)$$

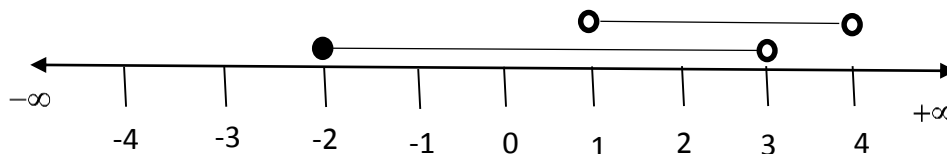
مثال : رابطه $(-3, 0] \cup [-1, 2]$ را ساده نمائید؟

$$(-3, 0] \cup [-1, 2] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 0\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2\}$$

$$= \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 2\} = (-3, 2]$$

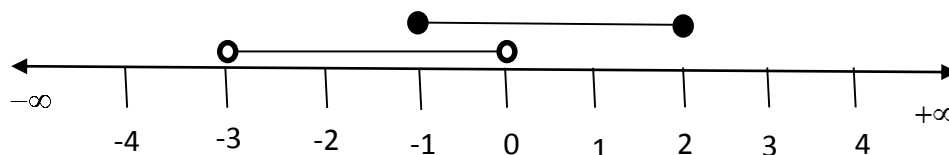
نکته : دو مثال ذیل را به روش دیگر که استفاده از محور اعداد است نیز حل نموده می توانیم. برای دریافت $[-2, 3) \cap (1, 4)$ ابتدا هر یک را بر روی محور اعداد نمایش داده تقاطع این دو قسمت جواب این رابطه است.

همانطور که در شکل ملاحظه می شود تقاطع این دو قسمت انتروال $(1, 3)$ است.



برای دریافت اتحاد انتروال های $(-3, 0] \cup [-1, 2]$ کافی است هر یک از انتروال ها را بر روی محور اعداد

نمایش داده و اتحاد این دو قسمت جواب مسئله است.



از مشاهده شکل می توان دریافت نمود اتحاد دو انتروال , انتروال باز $(-3, 2]$ است.

نامساوات (Inequalities)

تعیین اشاره

منظور از تعیین اشاره یک افاده الجبری این است که مشخص نمائیم افاده به عوض کدام مقادیر متحول مثبت ، به عوض کدام مقادیر متحول منفی و به عوض کدام مقادیر متحول صفر (بدون اشاره) می شود.

حالت اول : تعیین اشاره افاده دو حده درجه یک که دارای شکل $ax+b$ می باشد طوریکه $a, b \in R$ بوده و x متحول افاده است.

برای تعیین اشاره $ax+b$ ابتدا آنرا برابر صفر قرار می دهیم تا مشخص شود کدام قیمت متحول افاده را صفر می سازد و برای تعیین اشاره کلی آنرا از جدول ذیل استفاده می نمائیم.

X	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$		مخالف اشاره 0 A	موافق اشاره a

مثال : افاده $3x+4$ را تعیین اشاره نمائید؟

$$3x+4=0 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

(1) حاصل افاده به عوض $x > -\frac{4}{3}$ مثبت است.

(2) حاصل افاده به عوض $x < -\frac{4}{3}$ منفی است.

(3) حاصل افاده به عوض $x = -\frac{4}{3}$ صفر است.

X	$+\infty$			
$3x+4$		-	0	+

مثال : افاده $-2x+8$ را تعیین اشاره نمائید؟

$$-2x+8=0 \Rightarrow x=4$$

(1) به عوض $x > 4$ افاده $-2x+8$ کوچکتر از صفر می شود.

(2) به عوض $x < 4$ افاده $-2x+8$ بزرگتر از صفر می شود.

(3) به عوض $x = 4$ افاده $-2x+8$ برابر به صفر می شود.

X	$-\infty$	4	$+\infty$
$-2x+8$		+	-

حالت دوم : تعیین اشاره افاده سه حده درجه دو

اشاره افاده $ax^2 + bx + c$ مربوط به Δ و ضریب x^2 یعنی (a) است و نظر به این دو، سه حالت به وجود می آید.

حالات Δ	جداول تعیین اشاره				
$\Delta > 0$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
	$ax^2 + bx + c$	موافق اشاره a	0 خلاف اشاره a	0 موافق اشاره a	
$\Delta = 0$	x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$	
	$ax^2 + bx + c$	موافق اشاره a	0 موافق اشاره a		
$\Delta < 0$	x	$-\infty$			$+\infty$
	$ax^2 + bx + c$	همواره موافق اشاره a			

مثال : افاده $(x^2 + x - 6)$ را تعیین اشاره نمائید؟

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

X	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
ax^2+bx+c	+	0	-	0	+

(1) حاصل افاده $x^2 + x - 6$ به عوض $(x < -3) \cup (x > 2)$ مثبت می شود.

(2) حاصل افاده $x^2 + x - 6$ به عوض $-3 < x < 2$ منفی است.

(3) حاصل افاده $x^2 + x - 6$ به عوض $x = -3$ و $x = 2$ صفر است.

مثال : افاده $x^2 + 2x + 1$ را تعیین اشاره نمائید؟

$$x = -1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow$$

X	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^2 + 2x + 1$	+	0	+

حاصل افاده $x^2 + 2x + 1$ به عوض $\{-1\} \setminus (-\infty, +\infty)$ مثبت است و تنها به عوض $x = -1$ برابر به صفر می شود.

مثال : افاده $-x^2 + x - 5$ را تعیین اشاره نمائید؟

حل :

$$-x^2 + x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = -19 \quad \Rightarrow \quad \Delta < 0$$

X	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2 + x - 5$	-	-

حاصل افاده $-x^2 + x - 5$ به عوض تمام اعداد حقیقی منفی است در این حالت گفته می شود این افاده یک افاده همواره منفی است.

حالت سوم : تعیین اشاره $(ax+b)^n$:

1) در صورتیکه n یک عدد جفت باشد افاده تنها به عوض جذر داخل قوس صفر بوده و به عوض تمام اعداد حقیقی دیگر حاصل افاده مثبت است.

$ax+b=0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$				
X	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	
$(ax+b)^n$		0		
		+	+	

2) در صورتیکه n یک عدد تاق باشد اشاره کلی این افاده معادل به اشاره افاده داخل قوس یعنی $ax+b$ است.

$ax+b=0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$				
X	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	
$(ax+b)^n$		0		
		خلاف اشاره A	موافق اشاره A	

مثال : افاده $(-3x-12)^4$ را تعیین اشاره نمائید؟

$-3x-12=0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$				
X	$-\infty$	-4	$+\infty$	
$(-3x-12)^4$		0		
		+	+	

مثال : افاده $(x-7)^5$ را تعیین اشاره نمائید؟

برای تعیین اشاره $(x-7)^5$ از توان تاق صرف نظر می کنیم.

X	$-\infty$	7	$+\infty$
$(x-7)^5$	-	0	+

حل :

$$x-7=0 \Rightarrow x=7$$

(1) به عوض $x < 7$ حاصل افاده $(x-7)^5$ منفی است.

(2) به عوض $x > 7$ حاصل افاده $(x-7)^5$ مثبت است.

(3) به عوض $x = 7$ حاصل افاده $(x-7)^5$ صفر است.

حالت چهارم : تعیین اشاره های الجبری

برای تعیین اشاره افاده های الجبری ابتدا کوشش می شود تا حد امکان افاده را به عوامل درجه یک و درجه دو تجزیه نمائیم پس از آن هر یک از عوامل را همزمان در یک جدول تعیین اشاره می نمائیم. در آخر با ضرب علامات در هر ستون افاده کلی تعیین اشاره می شود.

مثال : افاده $(x^3-1)(3x-9)$ را تعیین اشاره نمائید؟

$$(x^3-1)(3x-9) = (x-1)(x^2+x+1)(3x-9) = 0$$

حل :

$$x_1=1 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=-3 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$3x-9=0 \Rightarrow x_2=3$$

X	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$x-1$	-	0	+	+	
$3x-9$	-	-	0	+	
x^2+x+1	+	+	+	+	
$(x^2+x+1)(x-1)(3x-9)$	+	0	-	0	+

(1) حاصل افاده $(x^3-1)(3x-9)$ به عوض $(x < 1) \cup (x > 3)$ مثبت می شود.

(2) حاصل افاده $(x^3-1)(3x-9)$ به عوض $1 < x < 3$ منفی است.

(3) حاصل افاده $(x^3-1)(3x-9)$ به عوض $x=1$ و $x=3$ صفر می شود.

حالت پنجم : تعیین اشاره کسور الجبری

در تعیین اشاره کسور الجبری ابتدا عملیه ها را بالای کسور الجبری تا حدی اجرا می نمائیم تا یک کسر ساخته شود پس از آن صورت و مخرج را همزمان در یک جدول تعیین اشاره می نمائیم و در آخر با ضرب علامات هر ستون اشاره کلی افاده حاصل می شود. باید در نظر داشته باشید افاده به عوض جذور مخرج تعریف نشده است. نکته : در حین قیمت گذاری جذور در جدول تعیین اشاره باید جذور از کوچک به بزرگ ترتیب شود.

مثال : افاده $\frac{x^2+5x+6}{-x+5}$ را تعیین اشاره نمائید؟

حل :

X	$-\infty$	-3	-2	5	
x^2+5x+6	+	0	-	0	+
$-x+5$	+		+	+	0
$\frac{x^2+5x+6}{-x+5}$	+	0	-	0	+

$$x^2+5x+6=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=-3$$

$$-x+5=0 \Rightarrow x_3=5$$

(1) حاصل افاده $\frac{x^2+5x+6}{-x+5}$ به عوض $x < -3$ و $-2 < x < 5$ مثبت است.

(2) حاصل افاده $\frac{x^2+5x+6}{-x+5}$ به عوض $x > 5$ و $-3 < x < -2$ منفی می شود.

(3) حاصل افاده $\frac{x^2+5x+6}{-x+5}$ به عوض $x = -2$ و $x = -3$ صفر و به عوض $x = 5$ نامعین است.

مثال : افاده $\frac{-x+4}{-x^2+x-5}$ را تعیین اشاره نمائید؟

$$-x+4=0 \Rightarrow x_1=4$$

$$-x^2+x-5=0 \Rightarrow \Delta=1-4(-1)(-5)=-19 \Rightarrow$$

$$\Delta < 0$$

X	$-\infty$	4	$+\infty$
$-x+4$	+	0	-
$-x^2+x-5$	-		-
$\frac{-x+4}{-x^2+x-5}$	-	0	+

(1) حاصل افاده $\frac{-x+4}{-x^2+x-5}$ به عوض $x < 4$ منفی است.

(2) حاصل افاده $\frac{-x+4}{-x^2+x-5}$ به عوض $x > 4$ مثبت است.

(3) حاصل افاده $\frac{-x+4}{-x^2+x-5}$ به عوض $x = 4$ برابر صفر است.

نکته : در تعیین اشاره یک افاده از افاده همواره مثبت صرف نظر می شود و نیز اگر یک افاده همواره منفی باشد در ابتدا صرف نظر نموده در آخر اشاره ها را تغییر می دهیم.

مثال : افاده $\frac{2x+4}{|x|+5}$ را تعیین اشاره نمائید؟

حل : مخرج $(|x|+5)$ یک افاده همواره مثبت است بناء برای تعیین اشاره $\frac{2x+4}{|x|+5}$ کافی است صورت را تعیین اشاره نمائیم.

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

X	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x + 4$	-	0	+
$\frac{2x + 4}{ x + 5}$	-	0	+

نکته : در صورتی که صورت یک کسر یک عدد مثبت باشد در تعیین اشاره از آن صرف نظر می نمائیم.

مثال : افاده $\frac{15}{-x-3}$ را تعیین اشاره نمائید؟

$$-x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

حل :

X	$-\infty$	-3	$+\infty$
$-x - 3$	+	0	-
$\frac{15}{-x - 3}$	+	0	-

مثال : افاده $\frac{x^2+6x-7}{-x^2-5}$ را تعیین اشاره نمائید؟

حل : افاده $-x^2-5$ یک افاده همواره منفی است در تعیین اشاره از آن صرف نظر نموده و در آخر برای تعیین

اشاره $\frac{x^2+6x-7}{-x^2-5}$ اشاره ها را تغییر می دهیم.

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x_1 = -7, x_2 = 1$$

X	$-\infty$	-7	-1	$+\infty$	
x^2+6x-7	+	0	-	0	+
$\frac{x^2+6x-7}{-x^2-5}$	-	0	+	0	-

مثال : افاده $(1-x)(x-3)^6(x-7)^9$ را تعیین اشاره نمائید؟

حل :

$$1-x=0 \Rightarrow x=1, \quad x-3=0 \Rightarrow x=3, \quad x-7=0 \Rightarrow x=7$$

جدور را همزمان در یک جدول به شکل متزاید ترتیب نموده اشاره هر عامل را تعیین نموده در آخر ضرب می نمائیم.

X	1	3	7
$1-x$	+	-	-
$(x-3)^6$	+	+	+
$(x-7)^9$	-	-	+
$(1-x)(x-3)^6(x-7)^9$	-	+	-

نامساوات معادل

دو نامساوات که دارای ظاهر متفاوت بوده ولی دارای حل یکسان باشند را نامساوات معادل گویند. میتوانیم برای حل یک نامساوات ، نامساوات معادل آنرا حل نمائیم.

قوانین نامساوات

1) به دو طرف یک نامساوات میتوانیم یک مقدار ثابت را علاوه و یا تفریق نمائیم یک نامساوات معادل به نامساوات اولیه حاصل می شود.

$$a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$$

2) دو طرف یک نامساوات را می توانیم به یک مقدار مثبت ضرب نمائیم یک نامساوات معادل به نامساوات اولی حاصل می شود.

$$a < b \text{ and } c > 0 \Rightarrow c \cdot a < b \cdot c$$

3) در صورت ضرب اطراف نامساوات به یک مقدار منفی و تغییر جهت نامساوات ، نامساوات حاصله همراه نامساوات اولیه معادل می شود.

$$a < b \text{ and } c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

4) با تقسیم اطراف یک نامساوات به یک مقدار مثبت نامساوات حاصله معادل به نامساوات اولیه است.

$$a < b \quad \text{and} \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

5) با تقسيم اطراف يك نامساوات به يك مقدار ثابت منفي و تغيير جهت نامساوات، نامساوات حاصله معادل به نامساوات اوليه خواهد بود.

$$a < b \quad \text{and} \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

6) در صورتیکه $a, b \in R^+$ باشد با معکوس نمودن و تغيير جهت نامساوات، نامساوات حاصله همراه نامساوات اوليه معادل خواهد بود.

$$a < b \quad \text{and} \quad a, b \in R^+ \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

7) در صورتیکه $\begin{cases} c < a \\ a < b \end{cases}$ گفته ميتوانيم $c < b$ است.

8) در صورتیکه a, b دو مقدار مثبت بوده اگر اطراف نامساوات را به توان هر عدد طبيعي بالا ببريم جهت نامساوات تغيير نمي کند.

$$0 < b < a \quad \Rightarrow \quad 0 < b^n < a^n$$

9) در صورتیکه a, b دو مقدار منفي باشد اگر اطراف نامساوات را به توان تاق برسانيم جهت نامساوات تغيير نمي کند و اگر به توان جفت برسانيم جهت نامساوات تغيير مي کند.

$$1) \quad a < b < 0 \quad \Rightarrow \quad a^{2n-1} < b^{2n-1} < 0$$

$$2) \quad a < b < 0 \quad \Rightarrow \quad a^{2n} > b^{2n} > 0$$

10) در صورتیکه n يك عدد طبيعي و خلاف يك باشد در رابطه ذيل صدق مي کند.

$$1) \quad 0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < a^n < a < 1$$

مثال :

$$0 < 0.5 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < (0.5)^3 < 0.5 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < 0.125 < 0.5 < 1$$

$$2) \quad -1 < a < 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > a$$

مثال :

$$-1 < -0.5 < 0 \quad \Rightarrow \quad (-0.5)^2 > -0.5 \quad \Rightarrow \quad 0.25 > -0.5$$

11) اگر دو طرف نامساوات تنها قيمت مطلقه قرار داشته باشد بناء گفته ميتوانيم دو طرف نامساوات مقادير

مثبت است در اين حالت مي توانيم اطراف نامساوات را به توان جفت بالا ببريم در اين حالت جهت نامساوات تغيير نمي کند و نيز ميتوانيم قيمت مطلقه را برداريم.

$$|f(x)| < |g(x)| \quad \Rightarrow \quad |f(x)|^{2n} < |g(x)|^{2n} \quad \Rightarrow \quad (f(x))^{2n} < (g(x))^{2n}$$

12) اگر چند نامساوات دارای جهت های یکسان باشند در صورتیکه این نامساوات را طرف به طرف همراه یکدیگر جمع و یا تفریق نمائیم جهت نامساوات تغییر نمی کند.

$$f(x) < g(x) \quad , \quad l(x) < p(x) \\ f(x) + l(x) < g(x) + p(x)$$

13) حدود اطراف یک نامساوات را میتوانیم با تغییر علامت به سمت دیگر انتقال دهیم نامساوات حاصله معادل به نامساوات اولیه است.

$$f(x) + g(x) < p(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < p(x) - g(x)$$

حل نامساوات

هدف از حل نامساوات $f(x) < g(x)$ دریافت مقادیری برای x است که شامل دومین $f(x)$ و $g(x)$ باشد و در این نامساوات صدق کند و یا به طور ساده منظور از حل نامساوات $f(x) < g(x)$ دریافت مقادیر x است که به عوض آن تابع $f(x)$ کوچکتر از $g(x)$ شود.

حل نامساوات یک مجهوله درجه یک

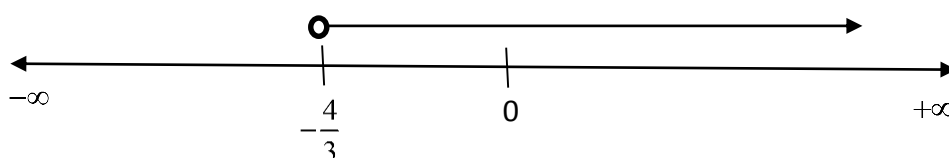
برای حل نامساوات یک مجهوله درجه 1 به دو روش عمل می کنیم.
روش اول: در این روش با استفاده از معلوم و مجهول نمودن نامساوات را به شکل $(ax < b)$ تبدیل نموده با تقسیم اطراف نامساوات به ضریب x قیمت مجهول حاصل می شود.
 مثال: نامساوات $2x + 3 < 5x + 7$ را حل نمائید؟

$$2x + 3 < 5x + 7 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5x < 7 - 3 \quad \Rightarrow \quad -3x < 4$$

$$\frac{-3}{-3}x > \frac{4}{-3} \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{4}{3}$$

حل این نامساوات $x > -\frac{4}{3}$ است که به شکل انتروال جواب این نامساوات عبارت است از: $(-\frac{4}{3}, +\infty)$.

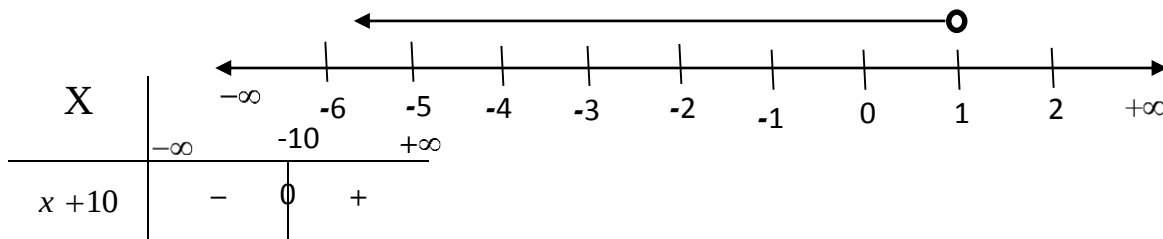
برای نمایش حل این نامساوات بر روی وکتور اعداد به شکل ذیل عمل می کنیم.



مثال: حل نامساوات $\frac{x+1}{2} > 2x - 1$ را دریافت نمائید؟

$$\frac{x+1}{2} > 2x-1 \Rightarrow (x+1) > 2(2x-1) \Rightarrow x+1 > 4x-2$$

$$-3x > -3 \Rightarrow \frac{-3}{-3}x < \frac{-3}{-3} \Rightarrow x < 1$$



روش دوم : حل نامساوات یک مجهوله درجه یک با استفاده از جدول تعیین اشاره

در این روش تمام حدود را به سمت چپ انتقال می دهیم سپس افاده سمت چپ را تعیین اشاره نموده در آخر با توجه به جدول مجموعه جواب نامساوات را تعیین می نمائیم.

مثال : نامساوات $2x+3 < x-7$ را حل نمائید؟

$$\begin{aligned} 2x+3 < x-7 &\Rightarrow 2x-x+3+7 < 0 \\ x+10 < 0 &\Rightarrow x+10=0 \Rightarrow x=-10 \end{aligned}$$

با توجه به جدول از آنجا که X هایی در نامساوات صدق می کند که $x+10$ را کوچکتر از صفر یعنی منفی می شود بناءً X هایی که در نامساوات $x+10 < 0$ صدق می کند عبارت است از : $x < -10$

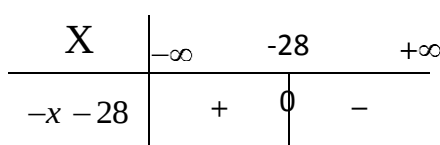
مثال : حل نامساوات $\frac{x}{2}-3 \leq \frac{3x-1}{5}$ را دریافت نمائید؟

$$\frac{x}{2}-3 \leq \frac{3x-1}{5} \Rightarrow 10 \cdot \left(\frac{x}{2}-3\right) \leq \left(\frac{3x-1}{5}\right) \cdot 10$$

$$5x-30 \leq 6x-2 \Rightarrow -x-28 \leq 0$$

$$-x-28=0 \Rightarrow x=-28$$

با توجه به $-x-28 \leq 0$ مجموع X هایی که در نامساوات صدق می کند طبق جدول $x \geq -28$ است.



حل سیستم نامساوات یک مجهوله درجه یک

جهت حل یک سیستم نامساوات کافی است هر یک از نامساوات سیستم را بهطور مستقل حل نموده در آخر برای دریافت جواب سیستم نامساوات بین جوابات حاصله از هر یک از نامساوات سیستم تقاطع دهیم.

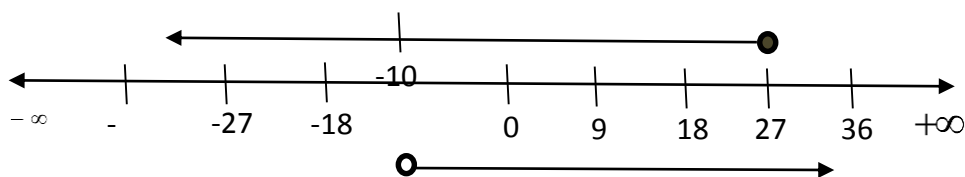
مثال : حل سیستم $\begin{cases} 3x + 5 \leq 86 \\ \frac{-2x + 1}{3} < 7 \end{cases}$ را دریافت نمائید

$$3x + 5 \leq 86 \Rightarrow 3x \leq 81 \Rightarrow x \leq 27$$

$$\frac{-2x + 1}{3} < 7 \Rightarrow -2x + 1 < 21 \Rightarrow x > -10$$

حل سیستم حاصل تقاطع $x \leq 27 \cap x > -10$ است برای دریافت

تقاطع جواب نامساوات را بر روی وکتور اعداد مشخص نموده قسمتی از جوابات که بر روی یکدیگر قرار گرفته اند تقاطع جوابات یعنی حل همزمان سیستم است.



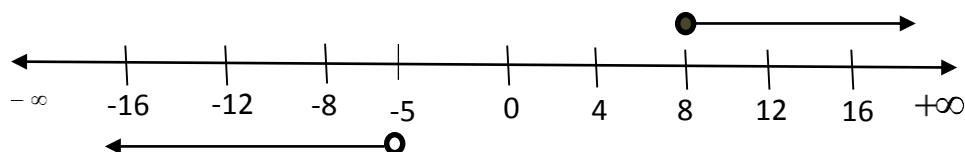
با توجه به شکل تقاطع حل سیستم نامساوات $(-10, 27]$ است بناء حل سیستم $-10 < x \leq 27$ است.

نکته : در صورتیکه بین حل نامساوات سیستم تقاطع وجود نداشته باشد سیستم دارای حل نمی باشد.

مثال : حل سیستم نامساوات $\begin{cases} 3x - 7 \geq 2x + 1 \\ 5x + 3 < 3x - 7 \end{cases}$ را دریافت نمائید؟

$$3x - 7 \geq 2x + 1 \Rightarrow x \geq 8$$

$$5x + 3 < 3x - 7 \Rightarrow 2x < -10 \Rightarrow x < -5$$



طبق شکل بین جوابات نامساوات سیستم تقاطع وجود ندارد بناء سیستم دارای حل نمی باشد یعنی حل سیستم نامساوات فوق ست خالی $\emptyset$ است.

$$[8, +\infty) \cap (-\infty, -5) = \emptyset$$

نکته : گاهی اوقات یک سیستم نامساوات به شکل $b < f(x) < a$ ارائه می شود برای حل این سیستم به دو روش عمل می شود.

روش اول : در این روش قوانین نامساوات را طوری تطبیق می‌نمائیم تا به طور مستقیم قیمت x را حاصل نمائیم.

مثال : حل نامساوات $3 < \frac{5-7x}{6} \leq 5$ را دریافت نمائید؟

حل :

$$3 < \frac{5-7x}{6} \leq 5 \Rightarrow 18 < 5-7x \leq 30 \Rightarrow 18-5 < -7x \leq 30-5$$

$$13 < -7x \leq 25 \Rightarrow \frac{13}{-7} > \frac{-7}{-7}x \geq \frac{25}{-7} \Rightarrow -\frac{25}{7} \leq x < -\frac{13}{7}$$

بناء حل سیستم $(-\frac{25}{7}, -\frac{13}{7})$ می‌باشد.

روش دوم : در این روش نامساوات $b < f(x) < a$ را به شکل سیستم $\begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > b \end{cases}$ تبدیل نموده حل آنرا

دریافت می‌نمائیم.

مثال : حل نامساوات $-4 < 2x+5 < 8$ را دریافت نمائید؟

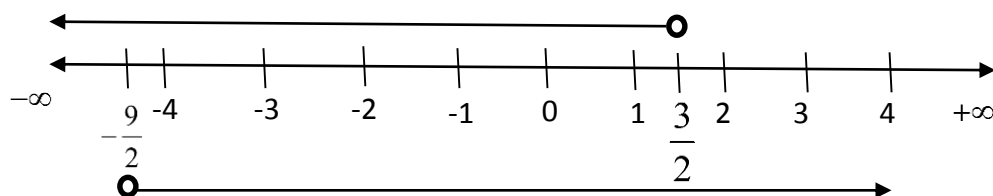
$$\begin{cases} 2x+5 < 8 \\ 2x+5 > -4 \end{cases};$$

حل :

X			
x^2-1	+	-	+

$$2x+5 < 8 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$2x+5 > -4 \Rightarrow 2x > -9 \Rightarrow x > -\frac{9}{2}$$



با توجه به شکل تقاطع حل‌های نامساوات سیستم $(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ می‌باشد بناء حل سیستم $(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ است.

برای حل نامساوات درجه دوم و یا بالاتر از آن از روش جدول تعیین اشاره استفاده می نمائیم. طوریکه ابتدا تمام حدود را به سمت چپ انتقال و تا حد امکان تجزیه نموده و سپس با استفاده از جدول حل نامساوات را تعیین می نمائیم.

مثال : نامساوات $2x^2 - x - 1 < 0$ را حل نمائید؟

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
X		0	0	
$2x^2 - x - 1$		+	-	+

حل :

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

با توجه به $2x^2 - x - 1 < 0$ متوجه می شویم X هایی

در نامساوات صدق می کند که $2x^2 - x - 1$ را کوچکتر از صفر (منفی) بسازد با توجه به جدول این X ها

عبارت اند از : $-\frac{1}{2} < x < 1$ بناء حل این نامساوات $-\frac{1}{2} < x < 1$ است.

	$-\infty$	-2	$+\infty$
X		0	
$x^2 + 4x + 4$		+	+

مثال : حل نامساوات $x^2 + 4x \leq -4$ را دریافت نمائید؟

$$x^2 + 4x \leq -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 \leq 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -2$$

با توجه به جدول تنها حل نامساوات $x = -2$ است.

	$-\infty$	$+\infty$
X		
$-x^2 + x - 5$	-	-

مثال : حل نامساوات $-x^2 + x - 5 < 0$ را دریافت نمائید؟

$$-x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(-1)(-5) \Rightarrow \Delta = -19 < 0$$

با توجه به جدول حل نامساوات $-x^2 + x - 5 < 0$ ست تمام اعداد حقیقی است : $(-\infty, +\infty)$.

مثال : مجموع جوابات نامساوات $x^4 - 1 \leq 0$ را دریافت نمائید؟

X	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$	$x^4 - 1 \leq 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) \leq 0$	حل :
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+	$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$
$x^2 + 1$	+		+		+	حل ندارد $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$
$x^4 - 1$	+	0	-	0	+	با توجه به جدول حل نامساوات $x^4 - 1 \leq 0$ عبارت است از $-1 \leq x \leq 1$

مثال : مجموعه جوابات $x^4 + x^2 < 4x^2 + 4$ را دریافت نمائید؟

حل :

$$x^4 + x^2 < 4x^2 + 4 \Rightarrow x^2 \cdot (x^2 + 1) < 4 \cdot (x^2 + 1)$$

افاده $(x^2 + 1)$ یک افاده همواره مثبت است در این صورت اطراف نامساوات را بر $(x^2 + 1)$ تقسیم نموده یک نامساوات معادل به نامساوات اولی حاصل می شود.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$x^2 \cdot (x^2 + 1) < 4 \cdot (x^2 + 1) \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$$

X	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	+	0	-	0	+

با توجه به جدول حل نامساوات $x^2 - 4 < 0$ که معادل

به نامساوات $x^4 + x^2 < 4x^2 + 4$ عبارت است از : $(-2, +2)$.

مثال : نامساوات $(x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 3) > 0$ را دریافت نمائید؟

حل :

X	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
x^2-4x+3	+	0	-	0	+	$x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=-3<0$
x^2+x+1	+		+		+	$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=3$
$(x^2-4x+3)(x^2+x+1)$	+	0	-	0	+	

با توجه به جدول حل نامساوات $(x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 3) > 0$ عبارت است از : $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

مثال : حل نامساوات $(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - 4) \leq 0$ را دریافت نمائید؟

$$x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2 - 4(1)(2) = -6 < 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

با توجه به جدول حل نامساوات

X	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+
$x^2 + \sqrt{2}x + 2$	+		+		+
$(x^2 - 4)(x^2 + \sqrt{2}x + 2)$	+	0	-	0	+

عبارت است از : $(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - 4) \leq 0$

$-2 \leq x \leq 2$ یعنی انتروال $[-2, 2]$.

حل نامساوات کسری

برای حل نامساوات کسری ابتدا تمام حدود را به سمت چپ انتقال می دهیم عملیات الجبری را طوری تطبیق می نمائیم تا سمت چپ یک کسر تشکیل شود افاده سمت چپ را تعیین اشاره نموده حل نامساوات را از جدول تعیین اشاره مشخص می نمائیم.

مثال : حل نامساوات $\frac{2x + 4}{-x^2 + x - 6} \geq 0$ را دریافت نمائید؟

X	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x + 4$	-	0	+
$-x^2 + x - 6$	-		-
$\frac{2x + 4}{-x^2 + x - 6}$	+	0	-

حل :

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$-x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = -23 < 0$$

با توجه به جدول حل نامساوات $\frac{2x + 4}{-x^2 + x - 6} \geq 0$ عبارت است از : $x \leq -2$.

نکته : به یاد داشته باشید اعدادی که مخرج را صفر می سازند شامل جواب نامساوات بوده نمیتواند و باید از مجموعه جوابات نامساوات حذف شوند.

مثال : حل نامساوات $\frac{(x-2)(x+3)^2}{x^2-2x-3} \leq 0$ را دریافت نمائيد؟

حل :

X	$-\infty$	-3	-1	2	3	$+\infty$	
$(x+3)^2$	+	0	+	+	+	+	
$x-2$	-	-	-	0	+	+	
x^2-2x-3	+	+	0	-	-	0	+
$\frac{(x-2)(x+3)^2}{x^2-2x-3}$	-	0	-	0	-	0	+

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$(x+3)^2=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1=3, x_2=-1$$

با توجه به جدول X هايي كه در نامساوات $\frac{(x-2)(x+3)^2}{x^2-2x-3} \leq 0$ صدق مي كند عبارت است از :

$$(-\infty, -1) \cup [2, 3)$$

مثال : حل نامساوات $\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+10} \geq 0$ را دریافت نمائيد؟

حل :

X	$-\infty$	-1	2	4	5	$+\infty$		
x^2-3x-4	+	0	-	-	0	+		
$x^2-7x+10$	+		+	0	-	0	+	
$\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+10}$	+	0	-		+	0	-	+

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=4$$

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow x_1=2, x_2=5$$

با توجه به جدول حل نامساوات $\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+10} \geq 0$ عبارت است از : $(-\infty, -1] \cup (2, 4] \cup (5, +\infty)$.

مثال : بزرگترین قیمت X را در نامساوات $\frac{4}{x} \leq \frac{3}{x-2}$ دریافت نمائيد؟

X	$-\infty$	0	2	8	$+\infty$
x^2-2x	+	0	-	+	+
$x-8$	-	-	-	0	+
$\frac{x-8}{x^2-2x}$	-	+	-	0	+

$$\frac{4}{x} \leq \frac{3}{x-2} \Rightarrow \frac{4}{x} - \frac{3}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{4x-8-3x}{x(x-2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-8}{x^2-2x} \leq 0$$

$$x-8=0 \Rightarrow x=8$$

$$x^2-2x=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=2$$

با توجه به جدول حل نامساوات $\frac{x-8}{x^2-2x} \leq 0$ عبارت است از : $(-\infty, 0) \cup (2, 8]$ و بزرگترین قیمت X که در نامساوات صدق می کند طبق جواب $x = 8$ است.

X	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-
$\frac{-2}{1-x}$	-		+

مثال : حل نامساوات $\frac{-2}{1-x} > 0$ را دریافت نمائید؟

حل : $1-x = 0 \Rightarrow x = 1$

با توجه به جدول حل نامساوات $\frac{-2}{1-x} > 0$ عبارت است از : $(1, +\infty)$.

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$-3x$	+	0	-
$x^2 - x + 4$	+		+
$\frac{-3x}{x^2 - x + 4}$	+	0	-

مثال : حل نامساوات $\frac{-3x}{x^2 - x + 4} < 0$ را دریافت نمائید؟

حل : $-3x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = -15 < 0$

با توجه به جدول حل نامساوات $\frac{-3x}{x^2 - x + 4} < 0$ عبارت است از : $x > 0$ یعنی انتروال $(0, +\infty)$.

X	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x + 4$	-	0	+
$-x^2 + x - 6$	-		-
$\frac{2x + 4}{-x^2 + x - 6}$	+	0	-

مثال : حل نامساوات $\frac{2x+4}{-x^2+x-6} \geq 0$ را دریافت نمائید؟

حل : $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

$-x^2 + x - 6 \Rightarrow \Delta = -23 < 0$

با توجه به جدول حل نامساوات $\frac{2x+4}{-x^2+x-6} \geq 0$ عبارت است از $x \leq -2$ یعنی انتروال $(-\infty, -2]$.

حل نامساوات شامل قيمت مطلقه (The Absolut Value Inequalities)

در حل نامساوات شامل قيمت مطلقه با حالات ذيل مواجه می شويد:

حالت اول: در صورتیکه $a \in R^+$ باشد حل نامساوات $|x| < a$ عبارت است از:

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a$$

مثال: حل نامساوات $|x| < 4$ را دریافت نمائيد؟

$$|x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4 \quad \text{حل:}$$

نکته: در نامساوات $|x| < a$ در صورتیکه $a \leq 0$ باشد نامساوات دارای حل نمی باشد.

به طور مثال نامساوات $|x| < 0$ و يا $|x| < -3$ دارای حل نمی باشد.

حالت دوم: در صورتیکه $a \in R^+$ باشد حل نامساوات $|x| > a$ عبارت است از $x > a$ به همراه $x < -a$.

$$|x| > a \Rightarrow (x > a) \cup (x < -a)$$

مثال: حل نامساوات $|x| > 5$ را دریافت نمائيد؟

$$|x| > 5 \Rightarrow (x > 5) \cup (x < -5) \quad \text{حل:}$$

حالت سوم: در حالت کلی برای حل نامساوات $|f(x)| < a$ طوريکه $a \in R^+$ باشد اين نامساوات را به شکل

$$-a < f(x) < a$$

تبدیل نموده حل می نمائيم.

مثال: نامساوات $|\frac{2x-3}{5}| < 3$ را حل نمائيد؟

$$|\frac{2x-3}{5}| < 3 \Rightarrow -3 < \frac{2x-3}{5} < 3 \Rightarrow -15 < 2x-3 < 15 \quad \text{حل:}$$

$$-12 < 2x < 18 \Rightarrow -6 < x < 9$$

بناء حل اين نامساوات انتروال $(-6, 9)$ است.

مثال: نامساوات $|2x-3| \leq 9$ را حل نمائيد؟

$$|2x-3| \leq 9 \Rightarrow -9 \leq 2x-3 \leq 9 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -3 \leq x \leq 6 \quad \text{حل:}$$

بناء حل نامساوات فوق انتروال $[-3, 6]$ است.

مثال: در صورتیکه $x \in I$ باشد در نامساوات $\frac{|2x-1|-9}{|x-3|} < 0$ حاصل $\sum x$ را دریافت نمائيد؟

حل: مخرج یک افاده همواره مثبت است $|x-3| \geq 0$ است بناء حاصل کسر $\frac{|2x-1|-9}{|x-3|}$ زمانی کوچکتر از

صفر می شود که صورت یعنی $|2x-1|-9$ کوچکتر از صفر شود بناء برای حل اين نامساوات صورت را

کوچکتر از صفر قرار داده حل می نمائيم.

$$|2x-1|-9 < 0 \Rightarrow |2x-1| < 9 \Rightarrow -9 < 2x-1 < 9$$

$$-8 < 2x < 10 \Rightarrow -4 < x < 5$$

از آنجا که $x \in I$ است بنام مجموعه جوابات تام این نامساوات $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ است عدد 3 شامل حل نامساوات نمی باشد زیرا مخرج را صفر می سازد.

$$\sum x = (-3) + (-2) + (-1) + (0) + (1) + (2) + (4) = 1$$

حالت چهارم: در صورتیکه یک نامساوات قیمت مطلقه شکل $|f(x)| > 0$ را داشته باشد طوری که $a \in R^+$ باشد برای حل این نامساوات دو مرحله اجرا می شود.

یک مرتبه $f(x) > a$ قرار داده حل می نمائیم و مرتبه دوم $f(x) < a$ قرار داده نامساوات را حل می نمائیم جواب کلی نامساوات $|f(x)| > a$ از اتحاد جواب های این دو مرحله حاصل می شود.

مثال: حل نامساوات $|2-x| > 10$ را دریافت نمائید؟

حل:

$$I \quad 2-x > 10 \quad \Rightarrow \quad x < -8$$

$$II \quad 2-x < -10 \quad \Rightarrow \quad x > 10$$

جواب کلی این نامساوات $x < -8 \cup x > 10$ است و آنرا توسط انتروال به $(-\infty, -8) \cup (10, +\infty)$ نمایش می دهیم.

مثال: حل نامساوات $|\frac{4x-3}{5}| > 3$ را دریافت نمائید؟

حل:

$$I \quad \frac{4x-3}{5} > 3 \quad \Rightarrow \quad 4x-3 > 15 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{9}{2}$$

$$II \quad \frac{4x-3}{5} < -3 \quad \Rightarrow \quad 4x-3 < -15 \quad \Rightarrow \quad x < -3$$

حل این نامساوات عبارت است از $x < -3 \cup x > \frac{9}{2}$ و آنرا توسط انتروال به قسم $(-\infty, -3) \cup (\frac{9}{2}, +\infty)$ نمایش می دهیم.

حالت پنجم: در صورتیکه در دو طرف نامساوات تنها قیمت مطلقه قرار داشته باشد با توجه به مثبت بودن دو طرف نامساوات، اطراف نامساوات را به توان 2 رسانیده قیمت مطلقه را برداشته نامساوات را حل می نمائیم.

$$|f(x)| > |g(x)| \quad \Rightarrow \quad (f(x))^2 > (g(x))^2$$

مثال: حل نامساوات $|x-2| < |x+3|$ را دریافت نمائید؟

حل:

$$|x-2| < |x+3| \quad \Rightarrow \quad |x-2|^2 < |x+3|^2 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 < (x+3)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 < x^2 + 6x + 9 \quad \Rightarrow \quad -10x < 5 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{5}{10} \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{1}{2}$$

بنام حل نامساوات انتروال $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ است.

حالت ششم : در صورتیکه یک نامساوات شامل قیمت مطلقه دارای شکل $b < |f(x)| < a$ باشد طوریکه $b < a$ و نیز $a, b \in R^+$ باشد دو مرحله ذیل را اجرا نموده جواب نهایی نامساوات $b < |f(x)| < a$ را از اتحاد جوابات این دو مرحله حاصل می نمائیم.

$$b < |f(x)| < a$$

$$I \quad b < f(x) < a$$

$$II \quad -a < f(x) < -b$$

مثال : حل نامساوات $3 < |x - 4| < 7$ را دریافت نمائید؟

حل :

$$I \quad 3 < x - 4 < 7 \Rightarrow 7 < x < 11 \quad (7, 11)$$

$$II \quad -7 < x - 4 < -3 \Rightarrow -3 < x < 1 \Rightarrow (-3, 1)$$

حل کلی نامساوات $3 < |x - 4| < 7$ عبارت است از : $(7, 11) \cup (-3, 1)$.

مثال : در صورتیکه $x \in I$ باشد مجموعه جوابات $\sum x$ نامساوات $3 < |2x - 1| < 7$ را دریافت نمائید؟

حل :

$$I \quad 3 < 2x - 1 < 7 \Rightarrow 4 < 2x < 8 \Rightarrow 2 < x < 4$$

$$II \quad -7 < 2x - 1 < -3 \Rightarrow -6 < 2x < -2 \Rightarrow -3 < x < -1$$

اعداد تام شامل حل نامساوات عبارت اند از : $\{3, -2\}$ ، بناء مجموع جوابات عبارت است از :

$$\sum x = (3) + (-2) = 1$$

حل نامساوات جذری

برای حل یک نامساوات جذری ابتدا دومین نامساوات را دریافت نموده با به توان رساندن طرفین نامساوات (با رعایت شرایط نامساوات) آنرا به یک نامساوات الجبری تبدیل نموده مجموعه جوابات نامساوات را دریافت نموده با دومین نامساوات تقاطع داده جواب نهایی حاصل می شود.

مثال (1) : مجموعه جوابات نامساوات $\sqrt{\frac{x+2}{1-x}} \geq 1$ را دریافت نمائید؟

حل : ابتدا دومین متحول را دریافت می نمائیم. برای انجام این کار تحت جذر یعنی $\frac{x+2}{1-x}$ را بزرگتر مساوی صفر قرار داده حل می نمائیم.

$$\frac{x+2}{1-x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq x < 1$$

حال اطراف نامساوات را به توان 2 بالا می بریم.

$$\sqrt{\frac{x+2}{1-x}} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2}{1-x} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2}{1-x} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2x+1}{1-x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq x < 1$$

جواب کلی را از تقاطع جواب نامساوات و دومین متحول دریافت می نمائیم.

$$[-2, 1) \cap [-\frac{1}{2}, 1) = [-\frac{1}{2}, 1)$$

بناء جواب این نامساوات انتروال $[-\frac{1}{2}, 1)$ است.

مثال (2) : مجموعه جوابات $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$ را دریافت نمائید؟

حل : ابتدا برای دریافت دومین متحول $x^2 - x - 12 \geq 0$ قرار می دهیم و با حل آن دومین متحول ($x \geq 4$ و یا

$x \leq -3$) حاصل می شود و از طرفی سمت راست نامساوات باید مثبت شود یعنی ($x > 0$) بناء دومین کلی متحول در این نامساوات ($x \geq 4$) است.

حل طرفین نامساوات را به توان 2 بالا می بریم.

$$x^2 - x - 12 < x^2 \quad \Rightarrow \quad x > -12$$

حال برای دریافت جواب نهایی نامساوات حل نامساوات را همراه دومین نامساوات تقاطع می دهیم.

$$(-12, +\infty) \cap [4, +\infty) = [4, +\infty)$$

بناء جواب نامساوات $x \geq 4$ است.

مثال (3) : مجموعه جوابات نامساوات $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} \leq 1$ را دریافت نمائید؟

حل : ابتدا برای دریافت دومین نامساوات $(x-3)$ و $(x+1)$ را بزرگتر مساوی صفر قرار می دهیم ($x-3 \geq 0$ و $x+1 \geq 0$) و از تقاطع جوابات این دو نامساوات دومین کل نامساوات مقدار $x \geq 3$ حاصل می شود.
با کمی دقت متوجه می شویم به عوض $x \geq 3$ افاده سمت چپ بزرگتر و یا مساوی 2 می شود که همواره بزرگتر از عدد 1 است بناء این نامساوات دارای حل نمی باشد.

نامساوات دو مجهوله درجه یک

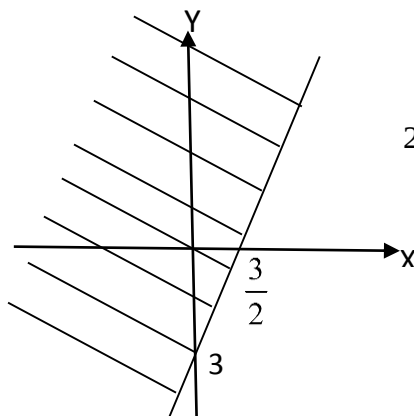
نامساوات دو مجهوله درجه یک دارای شکل عمومی $Ax + By + c > 0$ می باشد و منظور از حل نامساوات دو مجهوله درجه 1 دریافت جوهره های مرتب (x, y) است طوریکه در نامساوات صدق کند.

حل نامساوات دو مجهوله درجه یک

برای حل یک نامساوات دو مجهوله درجه یک مراحل ذیل را اجرا می نمائیم :

- 1) با استفاده از معلوم و مجهول نمودن قیمت y را از نامساوات حاصل می نمائیم.
- 2) نامساوات را به مساوات تبدیل نموده گراف تابع درجه یک حاصله را ترسیم می نمائیم.
- 3) یک جوهره مرتب را در قسمت بالا و یا پایین مستقیم انتخاب می نمائیم در صورت صدق کردن همان ساحه حل نامساوات می باشد و سمت دیگر را خط می زنیم و یا برای مشخص نمودن ساحه حل نامساوات در صورتیکه علامه بزرگتر به سمت y قرار است $(y > ax + b)$ در این صورت سمت بالای گراف ساحه حل است. در صورتیکه y های کوچکتر جواب باشد $(y < ax + b)$ در این صورت ساحه تحت گراف ساحه حل می باشد.

مثال (1) : ساحه حل نامساوات $4x - 2y > 6$ را دریافت نمائید؟



$$\text{حل : } y < 2x - 3 \quad -2y > -4x + 6 \quad 1) \quad 4x - 2y > 6$$

$$2) \quad y = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad (0, -3), \quad \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

جوهره مرتب $(0, 0)$ را در نامساوات صدق می دهیم.

$$4x - 2y > 6 \quad \Rightarrow \quad 4(0) - 2(0) > 6 \quad 0 > 6$$

جوهره مرتب $(0, 0)$ در نامساوات صدق ننموده بناء ساحه بالا گراف ساحه حل نبوده بلکه قسمت پایین گراف ساحه حل است.

نکته : با توجه به $y < 2x - 3$ بدون قیمت گذاری باید متوجه می شدیم که y های کوچکتر از خط جواب است بناء ساحه حل نامساوات ساحه تحت گراف است.

مثال (2) : با توجه به شکل ساحه مشخص شده حل کدام

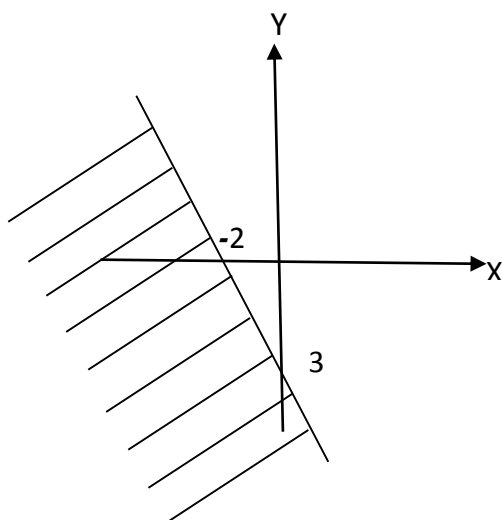
نامساوات است؟

حل : ابتدا معادله خط را دریافت نموده قیمت y را در یک

طرف مساوات قرار داده با توجه به ساحه حل متوجه می شویم

که نامساوات شکل $y < ax + b$ را دارد زیرا y های کوچکتر

ساحه حل است.



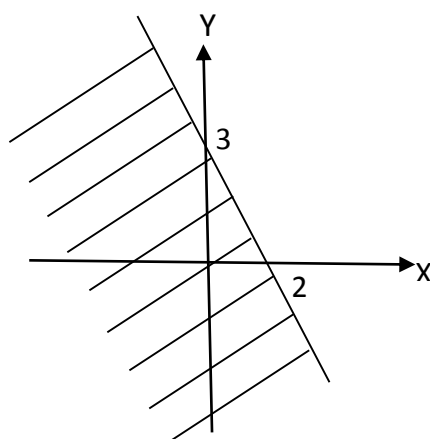
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \begin{matrix} a=-2 \\ b=-3 \end{matrix} \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = -6 \Rightarrow 2y = -3x - 6$$

$$y = -\frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow y < -\frac{3}{2}x - 3$$

مثال (3) : با توجه به شکل قسمت خط خورده ساحه حل کدام نامساوات است؟

حل : ابتدا معادله گراف را دریافت نموده با توجه به شکل متوجه

می شویم نامساوات شکل $y < ax + b$ را دارد.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} a=2 \\ b=3 \end{matrix} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$3x + 2y = 6 \Rightarrow 2y = -3x + 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$y < -\frac{3}{2}x + 3$$

حل سیستم نامساوات دو مجهوله درجه یک

جهت حل سیستم نامساوات ابتدا هر یک از نامساوات سیستم را حل می نمائیم و ساحه ای که شامل حل

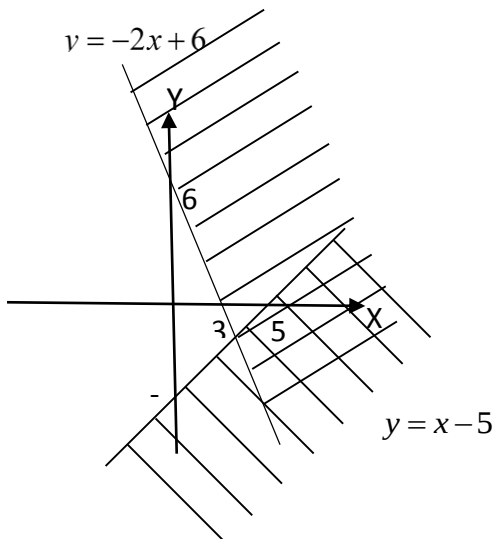
نامساوات نباشد را خط می زنیم و در آخر قسمتی از سیستم کمیات وضعیه که خط نخورده باشد حل همزمان

سیستم است.

مثال (1) : حل سیستم نامساوات $\begin{cases} x-y < 5 \\ 2x+y < 6 \end{cases}$ را دریافت نمائید؟

حل :

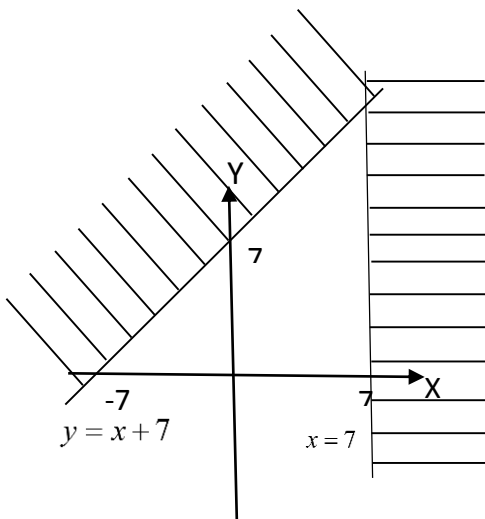
$$\begin{cases} x-y < 5 \\ 2x+y < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y < -x+5 \\ y < -2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x-5 \\ y < -2x+6 \end{cases}$$



مثال : ساحه حل سیستم نامساوات $\begin{cases} -x+y < 7 \\ x < 7 \end{cases}$ را دریافت نمائید؟

حل

$$\begin{cases} -x+y < 7 \\ x < 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x+7 \\ x < 7 \end{cases}$$



مثال (3) : با توجه به شکل قسمت خط نخورده ساحه حل کدام

سیستم نامساوات است؟

حل : ابتدا معادله خطوط را دریافت نموده با توجه به اینکه قسمت خط

نخورده ساحه حل است علامه نامساوات را قرار می دهیم. معادله خط

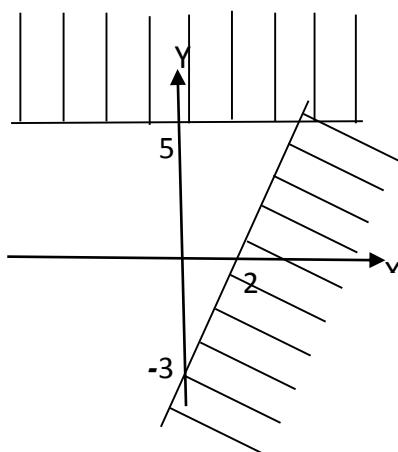
افقی $y = 5$ است و طبق شکل تحت گراف ساحه حل است بناء

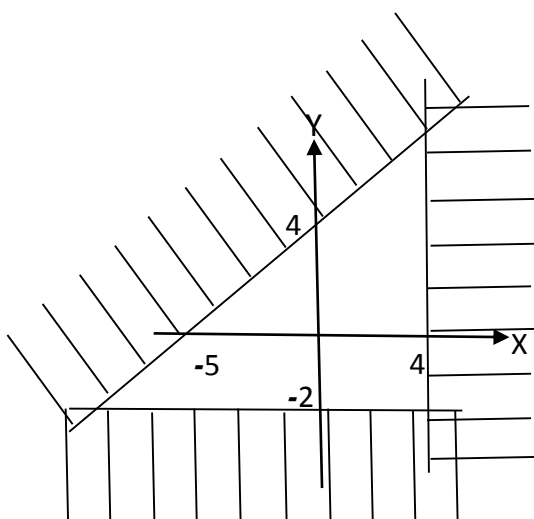
نامساوات آن $y < 5$ است.

معادله خط مایل $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ است و پس از ساده سازی معادله شکل

$y = \frac{3}{2}x - 3$ را به خود می گیرد و با توجه به شکل ساحه حل تحت گراف است بناء نامساوات آن شکل

$$\therefore \begin{cases} y < 5 \\ y > \frac{3}{2}x - 3 \end{cases}$$





مثال (4) : ساحه خط نخورده حل کدام سیستم نامساوات است؟

حل :

$$\begin{matrix} a=-5 \\ b=4 \end{matrix} \Rightarrow \frac{x}{-5} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow -4x + 5y = 20$$

$$5y = 4x + 20 \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + 4$$

با توجه به ساحه حل نامساوات شکل $y < \frac{4}{5}x + 4$ را دارد

$$\begin{cases} y < \frac{4}{5}x + 4 \\ x < 4 \\ y > -2 \end{cases}$$

بناء در حالت کلی سیستم نامساوات دارای شکل ذیل است :

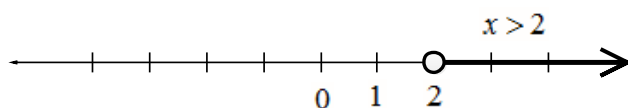
مثالها

1- نامساوات $2x + 1 > 5$ را حل نمایید.

$$2x + 1 > 5$$

$$2x + 1 - 1 > 5 - 1$$

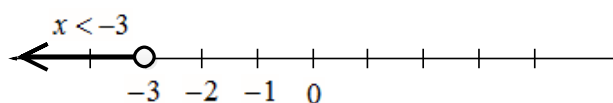
$$2x > 4 \Rightarrow \boxed{x > 2}$$



2- نامساوی‌های ذیل را حل نمایید.

$$3x + 1 < x - 5$$

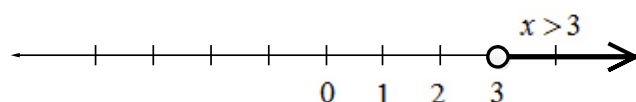
$$3x - x < -5 - 1 \Rightarrow 2x < -6 \Rightarrow \boxed{x < -3}$$



$$x + 5 < 3x - 1 \Rightarrow 5 + 1 < 3x - x$$

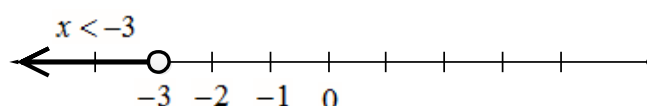
3)

$$\frac{6}{2} < \frac{2}{2}x \Rightarrow \boxed{x > 3}$$

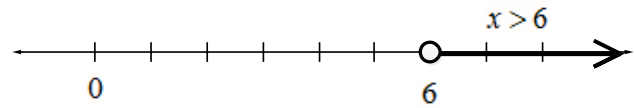


4)

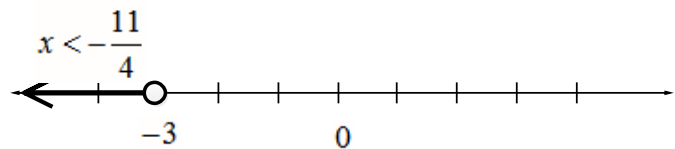
$$8 + x < 5 \Rightarrow x < 5 - 8 \Rightarrow x < -3$$



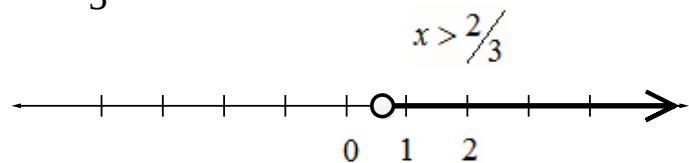
5) $5 + x < 2x - 1 \Rightarrow 5 + 1 < 2x - x \Rightarrow x > 6$



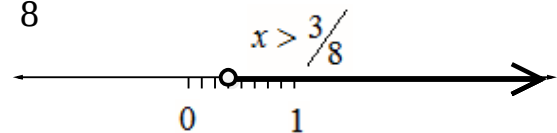
6) $-3x - 4 > x + 7 \Rightarrow -4 - 7 > x + 3x$
 $\Rightarrow -11 > 4x \Rightarrow x < -\frac{11}{4}$



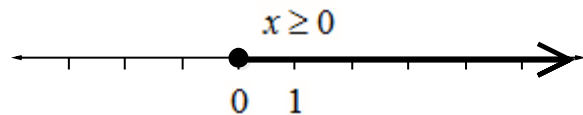
7) $\frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$
 $\frac{3}{2}x - x > -\frac{2}{3} + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > \frac{2}{3}$



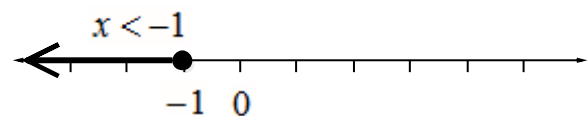
8) $0.5 - x < 3x - 1$
 $0.5 + 1 < 3x + x \Rightarrow \frac{3}{2} < 4x \Rightarrow x > \frac{3}{8}$



9) $2 - x \leq 2 \Rightarrow 2 - 2 \leq x \Rightarrow x \geq 0$

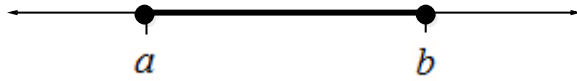


10) $2x - 5 - 7x > 0 \Rightarrow -5x > 5 \Rightarrow -x > 1 \Rightarrow x < -1$

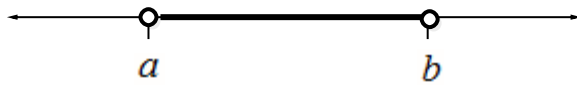


فاصله‌ها (انتروال‌ها)

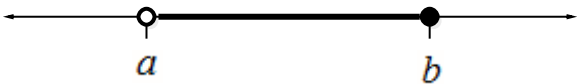
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$



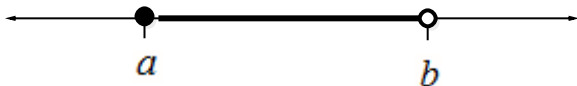
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

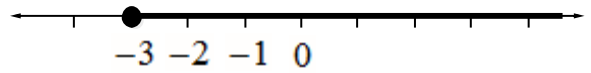


$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$



$$11) \quad 2x - 5 \leq \frac{3}{2}x - 1$$

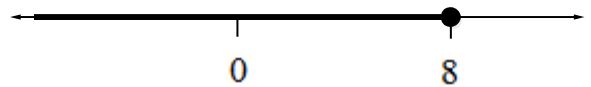
$$2x - \frac{3}{2}x \leq -1 + 5 \Rightarrow \frac{1}{2}x \leq 4 \Rightarrow x \leq 8$$



12)

$$3x - 2 \leq 5x + 4 \Rightarrow 3x - 5x \leq 4 + 2$$

$$-2x \leq 6 \Rightarrow x \geq -3$$

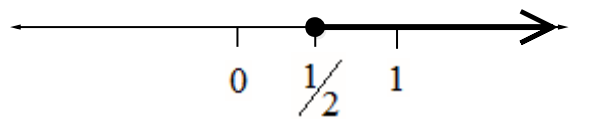


13)

$$-2(2x + 3) \leq 6(x - 2) + 1$$

$$-4x - 6 \leq 6x - 12 + 1 \Rightarrow -4x - 6x \leq -11 + 6$$

$$-10x \leq -5 \Rightarrow 10x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$



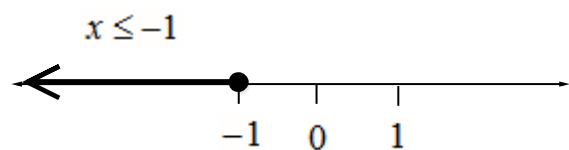
14)

$$\frac{3x - 2}{5} \leq \frac{x - 2}{3} \Rightarrow 3(3x - 2) \leq 5(x - 2)$$

$$9x - 6 \leq 5x - 10 \Rightarrow 9x - 5x \leq -10 + 6$$

$$4x \leq -4$$

$$x \leq -1$$



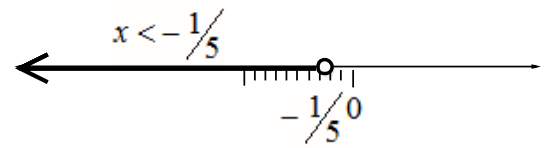
$$x + \frac{x-1}{3} > 3x \Rightarrow 3x + x - 1 > 9x$$

15)

$$4x - 1 > 9x \Rightarrow 4x - 9x > 1$$

$$-5x > 1$$

$$x < -\frac{1}{5}$$



$$\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} > \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$$

$$\Rightarrow 8(x+7) - 3x > 6(3-x) + 2x$$

$$\Rightarrow 8x + 56 - 3x > 18 - 6x + 2x$$

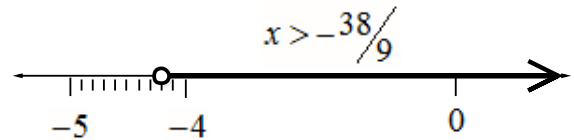
16)

$$\Rightarrow 5x + 56 > 18 - 4x$$

$$\Rightarrow 5x + 4x > 18 - 56$$

$$\Rightarrow 9x > -38$$

$$\Rightarrow x > -\frac{38}{9}$$

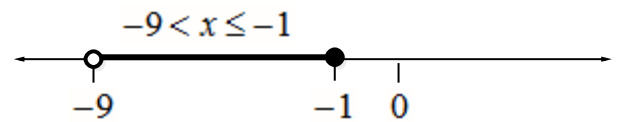


$$-2 < \frac{x+5}{2} \leq 2 \Rightarrow -4 < x+5 \leq 4$$

17)

$$\Rightarrow -4 - 5 < x + 5 - 5 \leq 4 - 5$$

$$\Rightarrow -9 < x \leq -1$$



نامساوات کسری

1)

$$\frac{x-2}{4+2x} > 0$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	•	+
$4+2x$	-	•	+	+
	+	-	+	
	حل نامساوات		حل نامساوات	

ست حل $\{x \in \mathbb{R} : x < -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ یا $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

2)

$$\frac{2x}{5x+3} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{5x+3} \leq 0$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{5}$	$+\infty$
$x+1$	-	●	+	+
$5x+3$	-	-	●	+
$\frac{x+1}{5x+3}$	+	-	+	+

حل نامساوات

ست حل $\left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x < -\frac{3}{5}\right\}$ یا $\left[-1, -\frac{3}{5}\right)$

3)

$$\frac{-x-9}{2x+4} < 0 \Rightarrow \frac{x+9}{2x+4} > 0$$

x	$-\infty$	-9	-2	$+\infty$
$x+9$	-	●	+	+
$2x+4$	-	-	●	+
$\frac{x+9}{2x+4}$	+	-	+	+

حل نامساوات

ست حل $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < -9\} \cup \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > -2\}$ یا $(-\infty, -9) \cup (-2, +\infty)$

4)

$$\frac{6x+7}{7-6x} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
$6x+7$	-	●	+	+
$7-6x$	+	+	●	-
$\frac{6x+7}{7-6x}$	-	+	-	-

حل نامساوات

ست حل $\{x/x \in \mathbb{R}: x \leq -\frac{7}{6}\} \cup \{x \in \mathbb{R}: x > \frac{7}{6}\}$ یا $(-\infty, -\frac{7}{6}] \cup (\frac{7}{6}, +\infty)$

5) $\frac{x+10}{2x-3} \geq 0$

x	$-\infty$	-10	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x+10$	-	•	+	+
$2x-3$	-	-	•	+
$\frac{x+10}{2x-3}$	+	-	+	+
حل نامساوات			حل نامساوات	

ست حل $= \{x \in \mathbb{R} \wedge x \leq -10\} \cup \{x \in \mathbb{R} \wedge x > \frac{3}{2}\}$ یا $(-\infty, -10] \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

6) $\frac{7x-2}{3-2x} > 3$
 $\frac{7x-2}{3-2x} - 3 > 0 \Rightarrow \frac{7x-2-9+6x}{3-2x} > 0 \Rightarrow \frac{13x-11}{3-2x} > 0$

x	$-\infty$	$\frac{11}{13}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$13x-11$	-	•	+	+
$3-2x$	+	+	•	-
$\frac{13x-11}{3-2x}$	-	+	-	-
حل نامساوات				

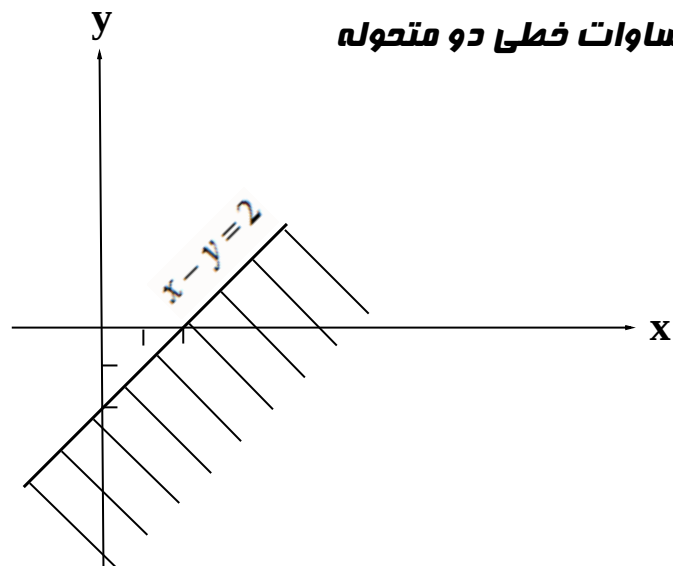
ست حل $= \{x / x \in \mathbb{R}, \frac{11}{13} < x < \frac{3}{2}\}$ یا $(\frac{11}{13}, \frac{3}{2})$

نامساوات خطی دو متحولہ

1) $x - y < 2$

$x - y = 2$ ترسیم خط

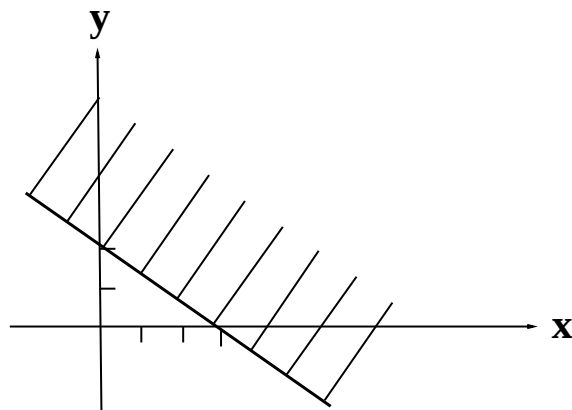
ناحیہ بالای گراف = ست جواب



2) $2x + 3y < 6$

$2x + 3y = 6$ ترسیم خط

ناحیه تحت گراف = ست جواب

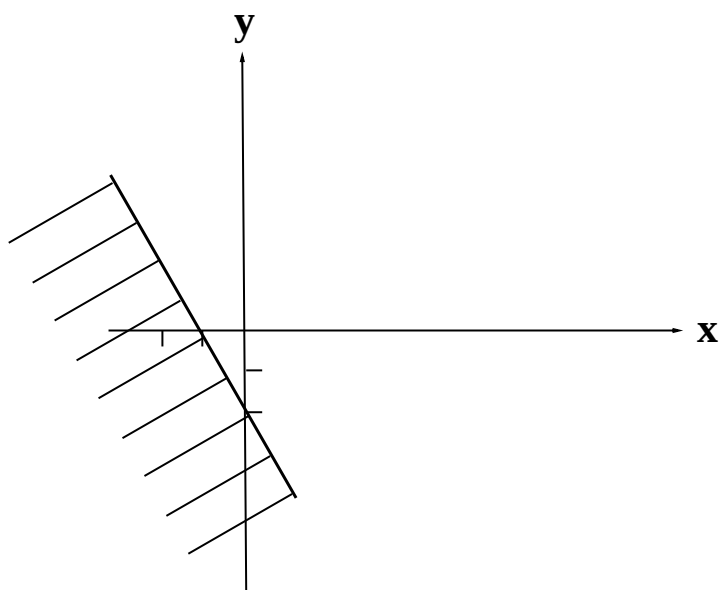


3) $3x - 2 < 5x + y$

$2x + y > -2 \Rightarrow 2x + y = -2$

$\frac{x}{-1} + \frac{y}{-2} = 1$ ترسیم خط

ست جواب ناحیه بالای گراف می باشد



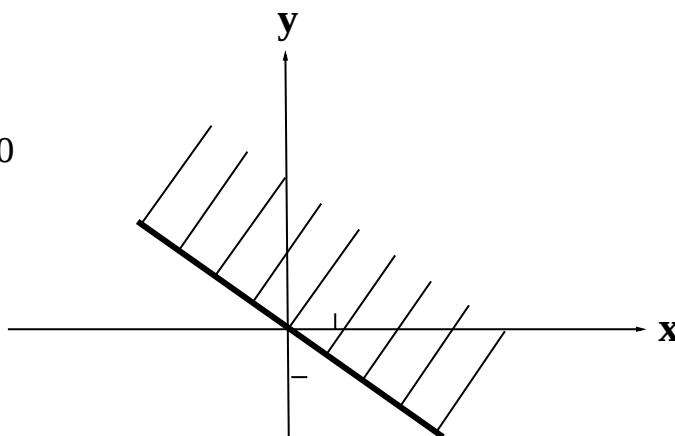
4)

$2x - 6y \geq 8x + 4y$

$3x + 5y \leq 0 \Rightarrow 3x + 5y = 0$

ترسیم خط

ست جواب ناحیه تحت گراف می باشد



5)

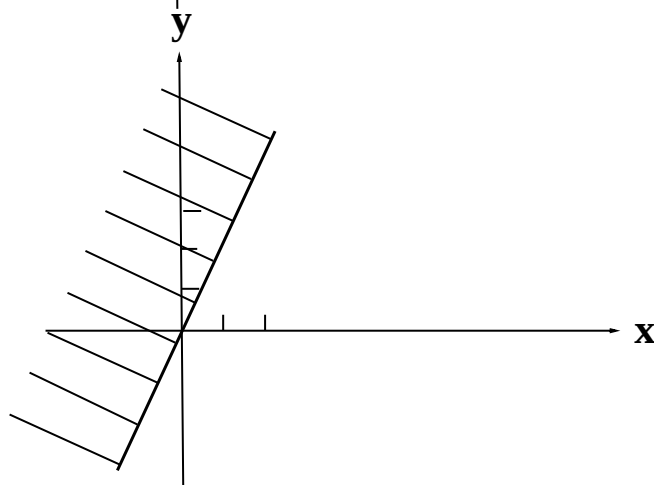
$2y < 3x \Rightarrow 2y - 3x < 0$

$\Rightarrow 3x - 2y > 0$

$3x - 2y = 0$

ترسیم خط

ست ناحیه جواب ناحیه تحت گراف می باشد

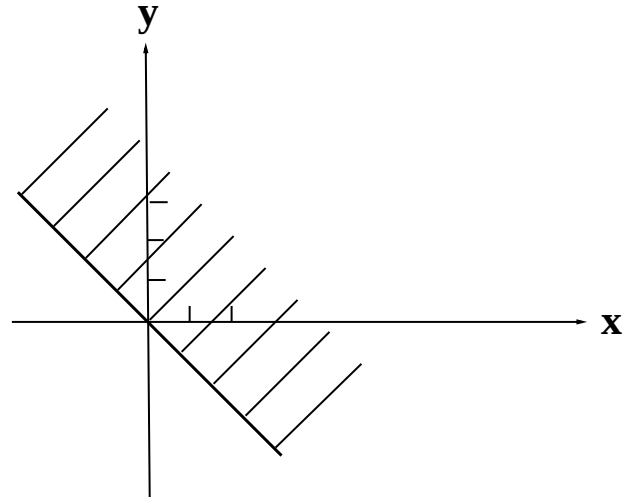


6) $x + y < 0$

ترسیم خط $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

ناصف الزاویه ربع دوم و چهارم

ست ناحیه جواب ناحیه تحت گراف می باشد.

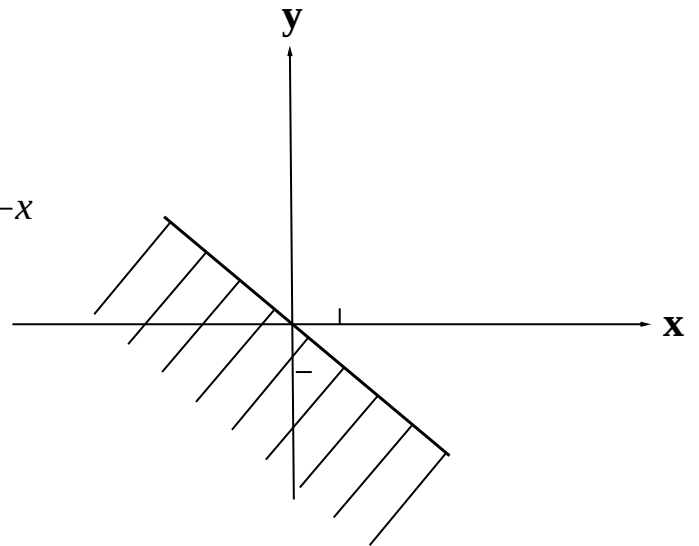


7) $x + y > 0$

ترسیم خط $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

ناصف الزاویه ربع دوم و چهارم

ست ناحیه جواب ناحیه بالای گراف می باشد.



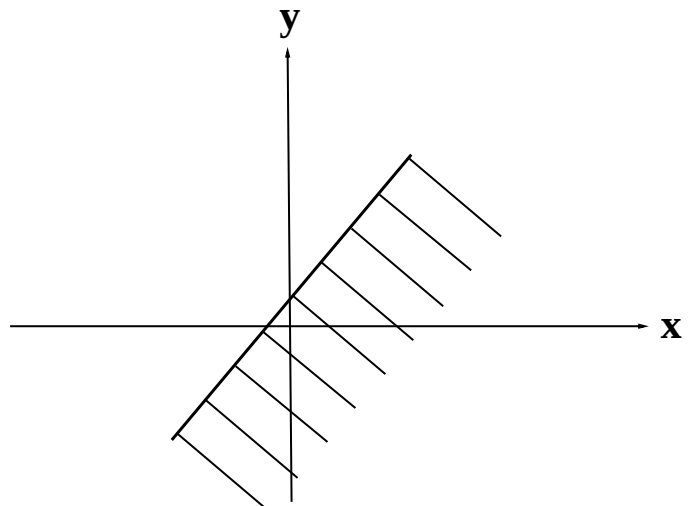
$5x - 3y < -1$

8) $5x - 3y = -1$

$5x - 3y + 1 = 0$

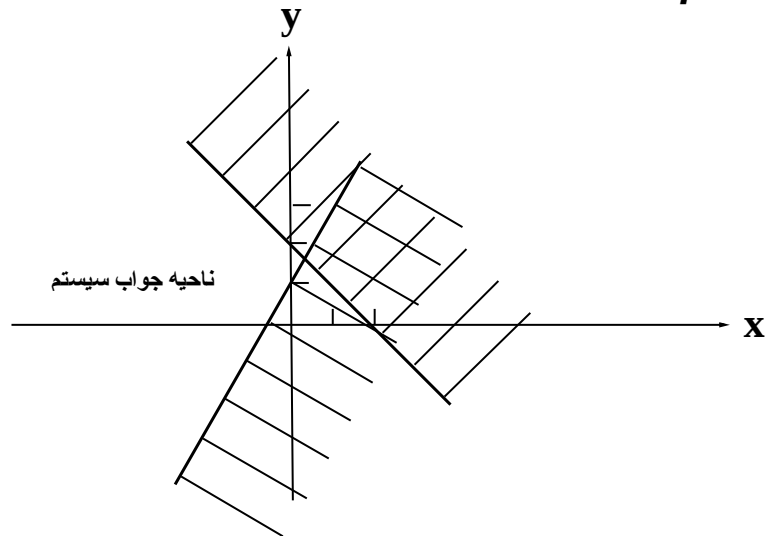
ترسیم خط

ست ناحیه جواب ناحیه بالای گراف می باشد.



سیستم نامساوات خطی

$$1) \begin{cases} x + y < 2 \\ y - 1 > 2x \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} 2y - 3x > -6 \\ y - 2 < 0 \\ 4x + 3y > -12 \end{cases}$$

$$2y - 3x = -6$$

$$3x - 2y = +6$$

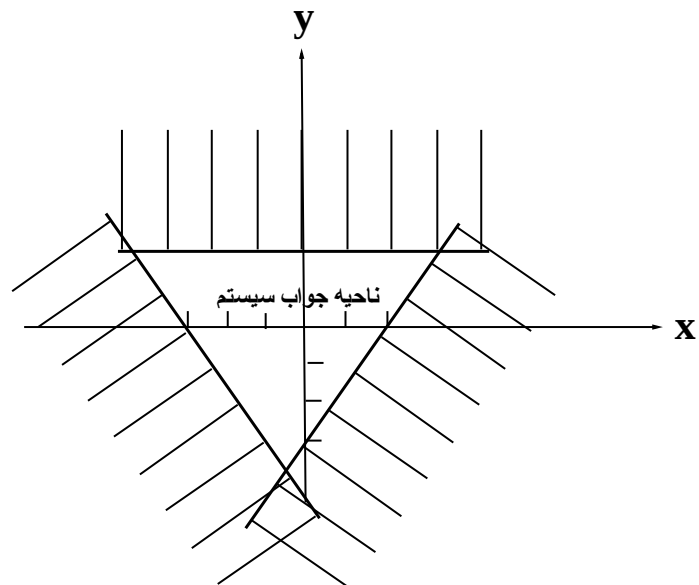
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1 \quad \text{معادله خط اول}$$

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2 \quad \text{معادله خط دوم}$$

$$4x + 3y = -12$$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1 \quad \text{معادله خط سوم}$$



سوالات نامساوات درجه اول

1. مقدار x را در نامساوات $\frac{1}{10}(2x+1) < \frac{1}{2} - \frac{x+8}{5}$ حاصل نمائيد؟

- (A) $(-3, +\infty)$ (B) $(-\infty, -3)$ (C) $(-\infty, +\infty)$ (D) $(-\infty, 0)$

2. قيمت x را در نامساوات $-\frac{2}{1-x} > 0$ بدست آوريد؟

- (A) $(-13, -3)$ (B) $(-\infty, 0)$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $(-\infty, 0)$

3. حاصل نامساوات $4(x+1) - 2 < x - 1$ کدام گزينه است؟

- (A) $x < 0$ (B) $x > \frac{1}{2}$ (C) $x > -\frac{1}{3}$ (D) $x < -1$

4. مقدار a را از نامساوات $a - \frac{a+4}{3} < 4$ بدست آوريد؟

- (A) $a < 0$ (B) $a > 8$ (C) $a < \frac{10}{3}$ (D) $a < 8$

5. قيمت x را در نامساوات $2(x-1) \leq -1 + 3(x+2)$ حاصل نمائيد؟

- (A) $x \geq 3$ (B) $x \geq 1$ (C) $x \leq -1$ (D) $x \geq -7$

6. در نامساوات $\frac{3}{4}(x+8) \geq -\frac{1}{2}(x-4) + x$ قيمت x کدام است؟

- (A) $x \geq -2$ (B) $x > -\frac{8}{5}$ (C) $x > -1$ (D) $x \geq -16$

7. حاصل نامساوات $2x - 6 > 0$ کدام گزينه است؟

- (A) $x < -6$ (B) $x < 3$ (C) $x > 3$ (D) $x > -3$

8. مقدار x در نامساوات $3 - 6x \leq 0$ را بياييد؟

- (A) $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ (B) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ (D) $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

9. حل نامساوات $-1 < 3x + 2 < 5$ کدام است؟

- (A) $[-1, 1)$ (B) $(-1, 1)$ (C) $(-1, 4]$ (D) $(-3, 5)$

10. حل نامساوات $\frac{x+1}{2} > 2x - 1$ کدام است؟

- (A) $(-\infty, 1)$ (B) $(1, +\infty)$ (C) $(-\infty, -1)$ (D) $(-\infty, 1]$

11. حل نامساوات $-6 < -2x + 7 < 3$ کدام انتروال است؟

- (A) $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right)$ (C) $\left(2, \frac{13}{2}\right)$ (D) $(-1, 2)$

12. حل نامساوات $\frac{1-x}{2} < -2$ کدام انتروال است؟

(A) $(4, +\infty)$ (B) $(5, +\infty)$ (C) $[5, +\infty)$ (D) هیچکدام

13. حل سیستم نامساوات $\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 5 < 9 \end{cases}$ کدام است؟

(A) $(3, 4)$ (B) $(2, 4)$ (C) $[2, 4]$ (D) $(3, 5)$

14. حل نامساوات $-2 \leq \frac{x}{2} - 1 \leq 2$ کدام است؟

(A) $(-2, 5)$ (B) $[-2, 6]$ (C) $[-2, 6)$ (D) $(-2, 6]$

کلید سوالات نامساوات درجه اول

شماره	جواب
1	2
2	3
3	4
4	4
5	4
6	4
7	3
8	3
9	2
10	1
11	3
12	2
13	2
14	2

سوالات نامساوات درجه دوم

1. حاصل نامساوات $\frac{3x+4}{x^2-3x+5} < 0$ را بدست آورید؟
 (A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-\frac{4}{3}, 0)$ (C) $(-\infty, -\frac{4}{3})$ (D) $(1, 2)$
2. مقدار نامساوات $x(x-1)^2 > 0$ را حاصل نمائید؟
 (A) $(-\infty, +\infty)$ (B) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ (C) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (D) $[-1, 0] \cup (1, +\infty)$
3. نامساوات $x^2 - 25 < 0$ را حل نمائید؟
 (A) $[-5, 5]$ (B) $(5, -5)$ (C) $(-5, 5)$ (D) هیچکدام
4. حل نامساوات $x^3 - 64x < 0$ را بدست آورید؟
 (A) $(0, 1) \cup (4, 16)$ (B) $(-\infty, -8) \cup (0, 8)$ (C) $[-8, +\infty) \cup [0, 8]$ (D) $(-\infty, +\infty)$
5. حاصل نامساوات $x^2 + 10 \leq 7x$ کدام است؟
 (A) $(2, 5)$ (B) $[2, 5]$ (C) $[5, 2]$ (D) $(5, 2]$
6. مقدار نامساوات $(x-1)(x^2 - 3x + 8) < 0$ را دریافت کنید؟
 (A) $(-\infty, 1)$ (B) $(-\infty, +\infty)$ (C) $[1, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1]$
7. مقدار x را از نامساوات $x^2 + 4x - 12 \leq 0$ بدست آورید؟
 (A) $6 \geq x \geq 2$ (B) $2 < x < 6$ (C) $-6 \leq x \leq 2$ (D) $-6 \leq x < 2$
8. کدام گزینه میتواند حل نامساوات $\frac{x+1}{x} < 2$ باشد؟
 (A) $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ (B) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ (C) $(0, 1) \cup [1, 2]$ (D) $(-\infty, +\infty)$
9. نامساوات $x^2 - x - 2 < 0$ را حل کنید؟
 (A) $-1 < x < 2$ (B) $1 < x < 2$ (C) $2 \leq x \leq 2$ (D) $2 \geq x \geq 2$
10. مقدار $? < x < ?$ را از نامساوات $x^2 - 6x + 5 > 0$ بدست آورید؟
 (A) $(-\infty, 5) \cup (1, \infty)$ (B) $(+\infty, 1) \cup (5, \infty)$ (C) $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ (D) $(-\infty, 1) \cup (5,)$
11. در نامساوات $\frac{x-1}{2-x} > 0$ مقدار $? < x < ?$ کدام گزینه است؟
 (A) $0 < x < 2$ (B) $1 < x < 2$ (C) $-1 < x < 2$ (D) $1 < x < 3$
12. مقدار $? < x < ?$ را از نامساوات $\frac{x+1}{x^2+4} \geq 0$ بیابید؟
 (A) $-1 \leq x < \infty$ (B) $-2 \leq x < \infty$ (C) $-3 \leq x < \infty$ (D) $-4 \leq x < \infty$
13. مقدار $? < x < ?$ را از نامساوات $(x+3)(2-x) > 0$ دریافت نمائید؟
 (A) $-2 < x < 3$ (B) $-3 < x < 2$ (C) $-1 < x < 4$ (D) $1 < x < 6$

14. حل نامساوات $(x^2 - 1) \cdot (x + 4) > 0$ کدام گزینه است؟

- (A) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ (B) $(+4, +1) \cup (1, \infty)$ (C) $(-\infty, 1) \cap (2, \infty)$ (D) $(-4, -1) \cup (1, \infty)$

15. کدام گزینه حل نامساوات $-x^2 + x - 5 > 0$ می باشد؟

- (A) R (B) $0 < x < \infty$ (C) $\emptyset$ (D) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

16. مقدار $? < x < ?$ را از نامساوات $\frac{(x^2 + 1)(2 - x)}{x^2 - 4x + 4} < 0$ بیابید؟

- (A) $5 < x < \infty$ (B) $0 < x < \infty$ (C) $2 < x < \infty$ (D) $1 < x < \infty$

17. مقدار a را در صورتیکه $x_1 \cdot x_2 < 0$ باشد از نامساوات $ax^2 - 3ax + 4a + 8 = 0$ بدست آورید؟

- (A) $-2 \leq x \leq 2$ (B) $-3 < a < 0$ (C) $-4 < a < 0$ (D) $-2 < a < 0$

18. قیمت x را از نامساوات $x \cdot (x^2 - 2x) > 0$ حاصل نمائید؟

- (A) $(2, +\infty)$ (B) $(-\infty, 0)$ (C) $(0, 2)$ (D) $(0, +\infty)$

19. به عوض کدام مقادیر a معادله ی درجه دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو جذر حقیقی مختلف

است؟

- (A) $a > 6$ یا $a < 2$ (B) $a > 4$ یا $a < 3$ (C) $2 < a < 6$ (D) $3 < a < 4$

20. اگر معادله ی درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد، مقادیر m کدام

است؟

- (A) $-2 \leq m \leq 1$ (B) $1 \leq m \leq 2$ (C) $-2 \leq m \leq 2$ (D) $-3 \leq m \leq 2$

21. مقدار m برای آن که معادله ی $(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ دو جذر مختلف علامه داشته باشد؟

- (A) $m > 2$ (B) $1 < m < 3$ (C) $m < 1$ (D) $0 < m < 1$

22. مقدار m برای آن که معادله ی درجه دوم $x^2 - x + m = 0$ دارای دو جذر مختلف مثبت باشد؟

- (A) $m < \frac{1}{4}$ (B) $0 < m < \frac{1}{4}$ (C) $m > 0$ (D) $m > \frac{1}{4}$ یا $m < 0$

سوالات نامساوات قیمت مطلقه

1. در صورتیکه $-5 < x < -1$ باشد مقدار y را در مساوات $|x+1| + |x+5| + y = 7$ تعیین کنید؟

- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) 3

2. مقدار افاده $|x+2| + |x-4|$ را در صورتیکه $|x| \leq 2$ باشد محاسبه کنید؟

- (A) -2 (B) 6 (C) 2 (D) 3

3. در صورتیکه قیمت $a < \frac{3}{4}$ باشد مقدار افاده $|4a-3| - |12-4a|$ را بیابید؟

- (A) -10 (B) -9 (C) -3 (D) 8

4. مقدار x را در صورتیکه $-6 < a < -2$ باشد از مساوات $|a+2| + |a+6| + x = 10$ بدست آورید؟

- (A) 6 (B) a (C) $-2a$ (D) 8

5. مقدار x را از نامساوات $|4-2x| \leq 8$ حاصل نمائید؟

- (A) (3,5) (B) $(-\infty, 6)$ (C) $[-2, +\infty)$ (D) $[-2, 6]$

6. در نامساوات $\left| \frac{x+5}{4} \right| \leq 4$ قیمت x را دریافت کنید؟

- (A) $(-\infty, 0)$ (B) $[-21, 11]$ (C) $(-10, 21]$ (D) $[-2, 30]$

7. در صورتیکه $x \in \mathbb{Z}$ باشد مجموع مقادیر x را از نامساوات $3 < |2x-1| < 7$ بدست آورید؟

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

8. بادر نظر داشت اینکه $\left. \begin{matrix} x+y=0 \\ x^2 \cdot y < 0 \end{matrix} \right\}$ است مقدار افاده $|y-x| - |x-3y|$ را حاصل کنید؟

- (A) $-2y$ (B) $4y-x$ (C) $2x-4y$ (D) $2y$

9. مقدار x را از نامساوات $1 \leq |2x-1| < 5$ دست آورید؟

- (A) $[1, 3) \cup (-2, 0]$ (B) $(-1, 0) \cup (2, 3)$ (C) $(1, 3) \cup (-2, 1)$ (D) $(1, 3] \cup (0, 2)$

10. قیمت افاده $|x-2| + |x+4| + 1$ را در صورتیکه $-4 < x < 2$ باشد بیابید؟

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

11. اگر $x < 0$ باشد مقدار افاده $||x|+2| - |-x|$ را بیابید؟

- (A) x (B) 2 (C) $2x+2$ (D) $2-x$

12. در صورت وجود این رابطه $x < 0 < y$ حاصل افاده $\sqrt{x^2} - |x-y| + \sqrt{y^2}$ چیست؟

- (A) $-2x$ (B) $-2y$ (C) $2y$ (D) 0

13. مقدار افاده $|3-2\sqrt{3}| + |4-2\sqrt{3}|$ را محاسبه کنید؟

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

14. در صورتیکه $x < 3$ باشد مقدار افاده $|x-3|+5x-4$ را بدست آورید؟
 (A) $6x-1$ (B) $6x-7$ (C) $4x+2$ (D) $4x-1$
15. مقدار افاده $|1-2a|-|-2a+6|$ را در صورتیکه $a < \frac{1}{2}$ باشد حاصل نمائید؟
 (A) -10 (B) -9 (C) -5 (D) 8
16. بنا به اینکه $x > 0$, $y < 0$ است مقدار افاده $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را بدست آورید؟
 (A) $2x$ (B) $x-y$ (C) $x+y$ (D) $2y$
17. قیمت افاده $\sqrt{a^2+4a+4}$ را در صورتیکه $a < -2$ باشد دریافت نمائید؟
 (A) $4-a$ (B) $-2-a$ (C) $2+a$ (D) $a+4$
18. اگر قیمت $1 < a < 2$ باشد مقدار افاده $\sqrt{a^2-4a+4} - \sqrt{a^2-2a+1} + 1$ را بیابید؟
 (A) $5-a$ (B) $4-2a$ (C) $2(a+2)$ (D) $2(1-a)$
19. مقدار افاده $\frac{|-5a|+|a|+|-4a|}{|a|}$ را نظر به اینکه $a < 0$ است بیابید؟
 (A) $10a$ (B) $-12a$ (C) 15 (D) 10
20. در نامساوات $\left| \frac{4x-3}{5} \right| > 3$ مقدار x را بدست آورید؟
 (A) $\left(\frac{9}{5}, 5 \right)$ (B) $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{9}{2}, +\infty \right)$ (C) $\left(-3, \frac{9}{2} \right)$ (D) $\left(-\infty, \frac{9}{2} \right]$
21. از نامساوات $|x-2| \leq |x-4|$ قیمت x را بدست آورید؟
 (A) $(-\infty, 0]$ (B) $(-\infty, -3)$ (C) $(-\infty, -3]$ (D) $(-\infty, 3]$
22. از سیستم نامساوات $\left\{ \begin{array}{l} |x+2| < 4 \\ |x-1| > 3 \end{array} \right\}$ مقدار $\sum x$ را بدست آورید؟
 (A) 6 (B) 7 (C) -9 (D) -12
23. نامساوات $|x-2| < 4$ را حل نمائید؟
 (A) $-2 < x < 6$ (B) $-2 < x < 0$ (C) $-2 < x < 2$ (D) $2 < x < 6$
24. مقدار x را از نامساوات $|x^2-8| < 8$ بیابید؟
 (A) $(-4, 4)$ (B) $(-4, 4) - \{0\}$ (C) R (D) $(-\infty, 4)$
25. نامساوات $|x^2+3| \leq 7$ را حل کنید؟
 (A) $[-2, 2]$ (B) $(-\infty, 2)$ (C) $(-2, +\infty)$ (D) $R - [-2, 2]$
26. در صورتیکه $x \in Z$ باشد مقدار $\sum x$ را از نامساوات $|2x-9| \leq 5$ دریافت کنید؟
 (A) 22 (B) 23 (C) 25 (D) 27
27. مقدار $x < ?$ را از نامساوات $|x^2-4x| < x$ بدست آورید؟

$$(A) 0 < x < 3 \quad (B) 2 < x < 3 \quad (C) 3 < x < 5 \quad (D) 4 < x < 5$$

28. با در نظر داشت اینکه $x < y < 0$ است مقدار افاده $\sqrt{16x^2} + \sqrt{25y^2} - |4x + y|$ را بدست آورید؟

$$(A) -2x \quad (B) -2x + 2y \quad (C) -4y \quad (D) -4y + x$$

29. قیمت افاده $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - |2 - x|$ را در صورتی که $x < 2$ باشد را دریافت کنید؟

$$(A) 6x \quad (B) -4x \quad (C) -7/2 \quad (D) 0$$

سوالات عمومی نامساوات کانکور های گذشته

1. معادله $x^2 - 2x + 4 = 0$ به کدام قیمت های x مثبت است؟
 (A) $x > 0$ (B) $x < 0$ (C) $2 < x < 1$ (D) تمام اعداد حقیقی است
2. ست حل نامساوات $0 < |2x - 1| < 1$ عبارت است از :
 (A) $(0, 1) - \{\frac{1}{2}\}$ (B) $(0, 1)$ (C) $(0, 2)$ (D) $(-2, 2)$
3. کدام یکی از قیمت های x نامساوات $(x+1)(x-2) < 0$ را صدق می کند؟
 (A) $x < -1$ (B) $x > 2$ (C) $-1 < x < 2$ (D) $4 < x < 6$
4. کدام یکی از قیمت های x نامساوات $|1 - \frac{1}{x}| \leq 1$ را صدق می کند؟
 (A) $x \geq \frac{1}{2}$ (B) $x \leq \frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ (D) حل ندارد
5. ست تمام حل نامساوات $(2x-8)(3x-12) \geq 0$ عبارت است از :
 (A) $2 < x \leq 3$ (B) $8 < x < 12$ (C) $-\infty < x < +\infty$ (D) $x > 8$
6. سیستم نامساوات های $\begin{cases} -4x + y > 1 \\ 4x - 6 > y \end{cases}$ چند حل دارد؟
 (A) یک حل دارد (B) بینهایت حل دارد (C) حل ندارد (D) دو حل دارد
7. حل نامساوات $4x^2 - 5x + 8 > 3x^2 + x$ عبارت است از :
 (A) $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$ (B) $(-\infty, 4) \cup (2, \infty)$ (C) $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ (D) $(2, 4)$
8. ست حل نامساوات $|2 + x| \leq 0$ عبارت است از :
 (A) $x > 4$ (B) $x = -2$ (C) $4 \leq x \leq 6$ (D) $-8 \leq x \leq 4$
9. ست حل نامساوات $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x-2} \geq 0$ عبارت است از :
 (A) $(-\infty, \frac{1}{3}] \cup (1, 2)$ (B) $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$ (C) $(-\infty, -3) \cup (1, 5)$ (D) $(-\infty, \frac{2}{3}] \cup (\frac{1}{2}, 3)$
10. اگر $m \in Z$ باشد حاصل جمع جذور معادله $\frac{|2m-1|-9}{|m-3|} = 0$ عبارت است از :
 (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0
11. ست حل نامساوات $\frac{(3-x)^2(x^2+4x-21)}{(16-x^2)(x^2+3x+7)} \geq 0$ عبارت است از :
 (A) $(-\infty, -7] \cup (-4, 3] \cup [4, \infty)$ (B) $[-7, -4) \cup [3, 4)$ (C) $(-7, -4) \cup (3, 4)$ (D) $(-\infty, -7] \cap (-4, 3] \cap [4, \infty)$
12. حل نامساوات $\sqrt{x^2+x} < \sqrt{x+2}$ عبارت است از :

$$(A) \quad x = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \quad (B) \quad -1 < x < 1 \quad (C) \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \quad (D) \quad -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

13. سیستم نامساوات $\begin{cases} x-3y < 1 \\ x+y > 0 \end{cases}$ دارای چند حل است؟

(A) یک حل (B) دو حل (C) سه حل (D) لایتناهی حل

14. قیمت x در نامساوات $\frac{x-1}{4} - 3 \leq \frac{2x-1}{3} + x$ عبارت است از :

$$(A) \quad x \geq -\frac{35}{17} \quad (B) \quad x \geq -2 \quad (C) \quad x \geq -\frac{33}{17} \quad (D) \quad x \geq -\frac{32}{17}$$

15. حل سیستم نامساوات $\begin{cases} 2x+4 > 0 \\ 2-3x < 0 \end{cases}$ عبارت است از :

$$(A) \quad x < \frac{2}{3} \quad (B) \quad x < \frac{1}{3} \quad (C) \quad x > \frac{2}{3} \quad (D) \quad x < -\frac{3}{2}$$

16. حل نامساوات $2x-3 > x-7$ عبارت است از :

$$(A) \quad x < -4 \quad (B) \quad x > -4 \quad (C) \quad x < -5 \quad (D) \quad x < -10$$

17. حل سیستم نامساوات $\begin{cases} 4x-8 < 0 \\ x+7 > 0 \end{cases}$ عبارت است از :

$$(A) \quad 2 < x < 4 \quad (B) \quad -7 < x < 2 \quad (C) \quad 3 < x < 4 \quad (D) \quad -9 < x < -7$$

18. برای کدام قیمت های k معادله $x^2 - kx + k^2 + 1 = 0$ دارای دو جذر حقیقی می باشد؟

$$(A) \quad k < -\frac{1}{3} \text{ \& } x > 0 \quad (B) \quad -\frac{1}{3} < k < 0 \quad (C) \quad k < 0 \quad (D) \quad \text{هیچکدام}$$

19. ست حل نامساوات $\frac{-x^2+3x+4}{x^2+5} > 0$ عبارت است از :

$$(A) \quad -5 < x < 1 \quad (B) \quad -4 < x < 2 \quad (C) \quad -1 < x < 4 \quad (D) \quad -4 < x < 1$$

20. ست حل نامساوات $|2+x| \leq 6$ عبارت است از :

$$(A) \quad x > 4 \quad (B) \quad x \leq 6 \quad (C) \quad 4 \leq x \leq 6 \quad (D) \quad -8 \leq x \leq 4$$

21. ناحیه حل نامساوات $\begin{cases} 2x-6 < 0 \\ 3x+21 > 0 \end{cases}$ عبارت است از :

$$(A) \quad x > 3 \quad (B) \quad -7 < x < 3 \quad (C) \quad x < -7 \quad (D) \quad 3 < x < 7$$

22. حل نامساوات $\frac{3x-1}{3} > \frac{2x+3}{4}$ عبارت است از :

$$(A) \quad x < -\frac{6}{13} \quad (B) \quad x > \frac{13}{6} \quad (C) \quad x < \frac{6}{13} \quad (D) \quad x < \frac{13}{6}$$

23. حل نامساوات $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} < x$ عبارت است از :

$$(A) \quad x < -1 \quad (B) \quad x > -1 \quad (C) \quad x < -2 \quad (D) \quad x < -3$$

24. کدام یکی از نقاط ذیل نامساوات دو مجهوله $\begin{cases} 2x - y > 2 \\ x + y < 0 \end{cases}$ را صدق می کند؟

- (A) $(0, -3)$ (B) $(6, 5)$ (C) $(0, 5)$ (D) $(4, 5)$

25. اگر $x < 0$ باشد آنگاه قیمت $|x| - |2 - x| + |x - 1|$ عبارت است از :

- (A) $1 - x$ (B) $3 - x$ (C) $3 - 2x$ (D) $1 - 2x$

26. اگر $x^{1007} < 0$ باشد آنگاه قیمت x در معادله $|x| + |5 - x| + |6 - x| + |7 - x| + |x - 9| = 1007$ عبارت است از :

- (A) -201 (B) -199 (C) -196 (D) 176

27. یک انتروال باز نقاط انجام های خود را :

- (A) در بر دارد (B) در بر ندارد (C) نیمه در بردارد (D) هیچکدام

28. انتروال $(-1, 4)$ عبارت است از :

- (A) $\{x / x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 4\}$ (B) $\{x / x \in \mathbb{R}, -1 < x < 4\}$
(C) $\{x / x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 1\}$ (D) $\{x / x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 4\}$

29. انتروال $[0, 1]$ عبارت است از :

- (A) $\{x / x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$ (B) $\{x / x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$
(C) $\{x / x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$ (D) $\{x / x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1\}$

30. برای اینکه $x^2 + ax + a^2 > 0$ همیشه مثبت باشد قیمت a عبارت است از :

- (A) $a = 0$ (B) $a > 0$ (C) برای تمام قیمت های a (D) $a < 0$

31. انتروال $(-1, 3)$ توسط ست قرار ذیل تعریف میگردد؟

- (A) $\{x / x \in \mathbb{R}, -1 < x < 3\}$ (B) $\{x / x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 3\}$
(C) $\{x / x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 3\}$ (D) $\{x / x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 3\}$

32. حل نامساوات $9 \leq 2x + 5 \leq 10$ عبارت است از :

- (A) $5 \leq x \leq 2$ (B) $2 \leq x \leq 5$ (C) $5 \leq x \leq \frac{9}{2}$ (D) $2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

33. حل سیستم نامساوات $\begin{cases} 3x - 4 < 2 \\ 5x + 1 < -4 \end{cases}$ عبارت است از :

- (A) $x < -1$ (B) $x > 3$ (C) $x < 3$ (D) $x < 1$

34. اگر $a > 0$ باشد $a + \frac{1}{a} \geq 2$ را به کدام یک از صورت های زیر میتوان نوشت؟

- (A) $(a + 1)^2 \geq 0$ (B) $(a - 2)^2 \geq 2$ (C) $(a - 1)^2 \geq 0$ (D) $(a + 2)^2 \geq 0$

35. نامساوات $-8 < x < 8$ را به کدام شکل ذیل می توان ارائه نمود؟

- (A) $|x| \leq 8$ (B) $|x| > 8$ (C) $|x| \geq 8$ (D) $|x| < 8$

36. شکل ساده ارائه نامساوات $x \geq 50$ و $x \geq -50$ عبارت است از :

(A) $|x| \leq 50$ (B) $|x| > 50$ (C) $|x| \geq 50$ (D) $|x| < 50$

37. حل نامساوات $|5x| > 15$ عبارت است از :

(A) $\begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases}$ (B) $x \geq 3$ (C) $x \leq -3$ (D) $\begin{cases} x > -3 \\ x < 3 \end{cases}$

38. حل نامساوات $|x+1| \geq 3$ عبارت است از :

(A) $\begin{cases} x > 2 \\ x < 4 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x > 2 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -4 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases}$

39. حل نامساوات $|-3x-2| < 1$ عبارت است از :

(A) $\frac{1}{3} > x > 1$ (B) $-\frac{1}{3} > x > -1$ (C) $-\frac{1}{3} > x > 1$ (D) $\frac{1}{3} > x > -1$

40. غیر مساوات $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ به کدام قیمت های X صحت دارد؟

(A) $2 < x < 3$ (B) $x < 3$ (C) $x > 2$ (D) $2 \leq x \leq 3$

41. قیمت X ثر سیستم نامساوات $\begin{cases} 3x+4 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ عبارت است از :

(A) $\frac{4}{3} < x < 1$ (B) $-\frac{4}{3} < x < 1$ (C) $-\frac{4}{3} \leq x \leq 1$ (D) $\frac{4}{3} \leq x \leq 1$

42. دو طرف یک نامساوات را به کدام عدد تقسیم کرده نمیتوانیم؟

(A) به صفر (B) به یک (C) به اعداد مثبت (D) به اعداد منفی

43. قیمت های X در سیستم نامساوات $\begin{cases} 2x-4 < 0 \\ 3x+9 > 0 \end{cases}$ عبارت است از :

(A) $2 < x < 3$ (B) $-3 < x < 2$ (C) $-2 < x < 3$ (D) $-3 \leq x \leq 2$

44. نامساوات $3 < |x-4| < 7$ کدام انتروال را مشخص می کند ؟

(A) $(-3,1) \cup (4,11)$ (B) $(-3,-1) \cup (4,11)$ (C) $(-3,1) \cup (7,11)$ (D) $(-3,11) \cup (1,7)$

45. کدام یک از نقاط زیر نامساوات دو مجهوله $3y+2x > 0$ را صدق می کند؟

(A) $(0,0)$ (B) $(0,-3)$ (C) $(-1,0)$ (D) $(0,2)$

46. اگر به دو طرف یک نامساوات یک عدد جمع و یا تفریق شود جهت غیر مساوات

(A) تغییر می کند (B) تغییر نمی کند (C) صفر می شود (D) منفی می شود

47. اگر دو طرف یک نامساوات را با عدد منفی ضرب و یا تقسیم نمائیم جهت نامساوات:

(A) تغییر نمی کند (B) تغییر می کند (C) صفر می شود (D) منفی می شود

48. قیمت X در نامساوات $2x-1 > x+3$ عبارت است از :

(A) $x > 4$ (B) $x < 4$ (C) $x \geq 4$ (D) $x \leq 4$

49. ست حل نامساوات $5x - 4 \geq 3 - 2x$ عبارت است از :

- (A) $x > 1$ (B) $x < 1$ (C) $x \geq 1$ (D) $x \leq 1$

50. ساحه حل نامساوات $\begin{cases} 2x + 6 > 0 \\ 3x + 21 > 0 \end{cases}$ عبارت است از :

- (A) $x > -3$ (B) $-7 < x < -3$ (C) $x < -7$ (D) $-12 < x < -7$

51. کدام یک از قیمت های X سیستم نامساوات $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2x - 8 < 0 \end{cases}$ را صدق می کند؟

- (A) $x > 4$ (B) $x \leq 2$ (C) $0 \leq x < 3$ (D) $3 \leq x < 4$

52. ست حل نامساوات $\begin{cases} 2x - 6 > 0 \\ 3x - 3 > 0 \end{cases}$ عبارت است از :

- (A) $x > 3$ (B) $-7 < x < 3$ (C) $x < -7$ (D) $1 < x < 3$

53. کدام قیمت متحول X نامساوات $x^2 - 9x + 18 < 0$ را صدق می کند؟

- (A) $x = 0$ (B) $x = 5$ (C) $x = 1$ (D) $x = 2$

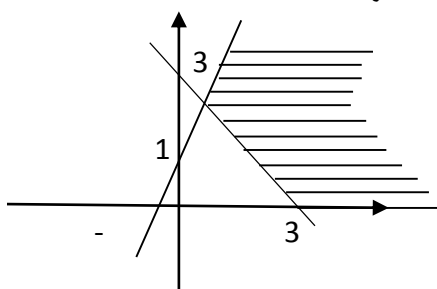
54. ست حل نامساوات $\frac{x^2 - 9}{2(x - 1)} \geq 0$ عبارت است از :

- (A) $\begin{cases} x > 3 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x \geq 3 \\ -3 \leq x < 1 \end{cases}$ (C) $-3 \leq x < 1$ (D) هیچکدام

55. حل نامساوات $2(x - 1) \leq 3(2 - x)$ عبارت است از :

- (A) $x > \frac{8}{5}$ (B) $x \leq \frac{8}{5}$ (C) $x \geq \frac{5}{8}$ (D) $x \geq -\frac{5}{8}$

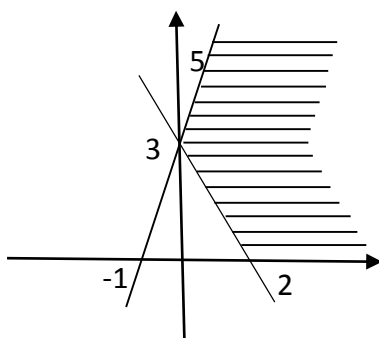
56. کدام یک از سیستم نامساوات های ذیل حل قسمت رنگ شده گراف است؟



(A) $\begin{cases} y \leq -x + 3 \\ y \geq 2x + 1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} y \geq -x + 3 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} y \geq x + 3 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} y \geq -x + 3 \\ y \leq -2x + 1 \end{cases}$

57. کدام سیستم نامساوات زیر حل ساحه رنگ شده است؟



(A) $\begin{cases} 3x - y \leq -3 \\ 2y \leq 6 - 3x \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x - y \leq -3 \\ 2y \geq 6 - 3x \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 3x - y \geq -3 \\ 2y \geq 6 - 3x \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3x - y \leq -3 \\ 2y \leq 6 - 3x \end{cases}$

کلید سوالات عمومی نامساوات کانکور های گذشته

شماره	جواب	شماره	جواب
1	31	4	1
4	32	1	2
1	33	3	3
3	34	1	4
4	35	3	5
3	36	3	6
1	37	3	7
3	38	2	8
2	39		9
4	40	3	10
2	41	2	11
1	42	3	12
2	43	4	13
3	44	1	14
4	45	3	15
2	46	2	16
2	47	2	17
1	48	4	18
3	49	3	19
1	50	4	20
4	51	2	21
1	52	2	22
2	53	2	23
2	54	1	24
2	55	2	25
	56	3	26
	57	2	27
	58	2	28
	59	1	29
	60	3	30

متریکس ها

تعریف : هرگاه دسته ای از اعداد یا اشیاء به شکل سطری و ستونی در یک جدول مستطیلی قرار داده شوند به نام متریکس (Matrix) یاد میشود. هر یک از اعداد ، عنصر متریکس نامیده میشود.

حروف بزرگ $A, B, C, \dots$ برای نمایش متریکس و حروف کوچک برای نمایش عناصر متریکس به کار میروند.

مثال : دسته اعداد زیر به شکل متریکس نمایش داده شده اند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the structure of matrix A with row and column labels:

- Rows: سطر اول (Row 1), سطر دوم (Row 2), سطر سوم (Row 3)
- Columns: ستون اول (Column 1), ستون دوم (Column 2), ستون سوم (Column 3)

نمایش یک عنصر متریکس :

یک عنصر متریکس را به صورت a_{ij} نمایش میدهند که i نمایش سطر و j نمایش ستونی است که a در آن قرار دارد. به طور مثال در مثال زیر داریم :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{22} = 4 \\ a_{12} = 2 \end{cases}$$

مرتبه یا درجه یک متریکس :

اگر تعداد سطرهای یک متریکس A مساوی به m و تعداد ستونهای آن مساوی به n باشد ، میگوییم A متریکس از مرتبه $m \times n$ است و خوانده میشود : (m در n) و مینویسیم : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

مثال : مرتبه متریکس های زیر مشخص شده است :

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

نکته : اگر A متركسى با يك سطر و ستون باشد يعنى $[a]_{1 \times 1}$ ، آنگاه متركس A به عدد داخلش مساوى است به :

$$A = [a]_{1 \times 1} = a$$

تساوى دو متركس

در صورتى دو متركس با هم مساوى هستند كه اولاً هم مرتبه بوده و ثانياً عناصر دو متركس يك به يك باهم مساوى باشند.

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a = -1, b = 2 \quad \text{مثال : قيمت هاى } a \text{ و } b \text{ را در متركس زير دريافت كنيد.}$$

انواع متركس ها

1- متركس سطرى : متركسى كه تنها داراى يك سطر باشد آن را متركس سطرى گويند .

$$A = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]_{1 \times 4} \quad \text{مانند :}$$

2- متركس ستونى : متركسى كه تنها داراى يك ستون باشد آن را متركس ستونى ميگويند .

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \text{مانند :}$$

3- متركس صفرى : متركسى كه تمام عناصر آن صفر باشد , آن را متركس صفرى ميگويند و به صورت $0_{m \times n}$ نمايش ميدهند مثلاً :

$$A_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \quad O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

4- متركس مربعى : هرگاه در متركس A تعداد سطرها و ستون ها مساوى باشند ($m = n$) متركس را مربعى ميگويند مثلاً :

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

هر متریکس مربعی دارای دو قطر می باشد قطری که عناصر آن $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ است قطر اصلی و قطری که عناصر آن $a_{1n}, \dots, a_{n1}$ است قطر فرعی مینامند.

5- متریکس قطری : متریکسی که تمام عناصر آن به غیر از قطر اصلی مساوی به صفر باشند به نام متریکس قطری یاد میشود. مثلا :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- متریکس سکالر : هر متریکس قطری که عناصر قطراصلی آن مساوی باشند متریکس سکالر میگویند.

مثلا :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

7- متریکس واحد : اگر در یک متریکس سکالر یا متریکس قطری عناصر قطر اصلی عدد یک باشند آنگاه

متریکس واحد گفته و به I نشان میدهیم مثلا:

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

متریکس مثلثی : اگر در یک متریکس مربعی تمام عناصر بالای قطر اصلی و یا پایین قطر اصلی صفر باشند در این صورت متریکس مثلثی یاد میشوند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

متقابل (متضاد) یک متریکس :

متضاد متریکس A را به $-A$ نشان داده و متریکس است که هر عنصر آن متضاد عناصر متناظرش در A میباشد که به صورت زیر تعریف میشود.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow -A = [-a_{ij}]_{m \times n}$$

جمع متریکس ها

جمع دو متریکس در صورتی ممکن است که هم مرتبه باشند و برای جمع، عناصر متناظر را باهم جمع میکنیم

مثال: دو متریکس زیر را جمع کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

تفریق متریکس ها

در تفریق متریکس ها، ما باید متریکس اول را با متضاد متریکس دوم جمع کنیم:

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

خواص جمع و تفریق متریکس ها

1- جمع متریکس ها دارای خاصیت تبدیلی است؛ اما تفریق متریکس ها دارای خاصیت تبدیلی نیست.

$$A + B = B + A \quad A - B \neq B - A$$

2- جمع و تفریق متریکسها دارای خاصیت اتحادی است. $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$

3- عنصر عینیت: $A + 0 = 0 + A = A$

$$-4 A + (-A) = -A + A = 0$$

ضرب یک متریکس در اسکالر

تعریف: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ یک متریکس و $k \in \mathbb{R}$ یک عدد باشد پس حاصل ضرب kA عبارت از متریکس C است، طوریکه عنصر آن حاصل ضرب k در a_{ij} است:

$$kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n} = [c_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow c_{ij} = ka_{ij}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $k=3$ باشد حاصل ضرب kA را دریافت کنید.

$$kA = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 12 \end{bmatrix}$$

خواص ضرب متریكس در سكالر

اگر A و B دو متریكس هم مرتبه و α , β دو عدد حقیقی باشند آنگاه :

$$1) \alpha(A+B) = \alpha A + B\alpha \quad 2) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad 3) \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

ضرب متریكس :

دو متریكس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ را در نظر میگیریم . برای اینکه دو متریكس قابل ضرب شدن در یک دیگر باشند باید تعداد ستون های متریكس اول با تعداد سطر های متریكس دوم برابر باشد.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

برای ضرب دو متریكس بدین صورت عمل میکنیم : مجموع حاصل ضرب عناصر سطر اول متریكس اول در ستون های متریكس دوم , عناصر سطر اول متریكس حاصل ضرب را تعیین میکند . مجموع حاصل ضرب عناصر سطر دوم متریكس اول در ستون های متریكس دوم , عناصر سطر دوم متریكس حاصل ضرب را تشکیل میدهد. با تکرار این عمل برای تمامی سطرها و ستون دو متریكس , متریكس حاصل ضرب محاسبه میشود.

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ داده شده باشند , حاصل ضرب $A \times B$ را دریابید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 + (-1)(-1) & 2 \times 3 + 3 \times 0 + (-1) \times 2 \\ (-2) \times 1 + 1 \times 2 + 2(-1) & -2 \times 3 + 1 \times 0 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ باشند $A \times B$ را دریابید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 + 0(-1) \\ -1 \times 1 + 0 \times 0 + 1(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

خواص ضرب متریكس ها

1- ضرب متریكس ها دارای خاصیت اتحادی اند اگر A, B و C متریكس ها باشند طوریكه حاصل ضرب

$$(A \cdot B)C = A(B \cdot C) \quad \text{داریم :}$$

2- ضرب متریكسها دارای خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع می باشند. داریم :

$$\begin{aligned} a) A(B+C) &= AB+AC & b) K(AB) &= (KA)B = A(KB) \\ c) (A+B)C &= AC+BC & d) IA &= AI = A \end{aligned}$$

ترانسپوز يك متركس (Transpose of matrix):

تعريف : هرگاه جاي سطر ها و ستون هاي متركس $A_{m \times n}$ را با يكدیگر تبديل نماييم متركس جديد را به نام ترانسپوز متركس اولی یاد میکنند و به A^T نشان داده میشود.

$$\text{مثلا : اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ باشد پس : } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

اگر يك متركس ترانسپوز يعني A^T با متركس خود يعني A مساوی باشد این متركس به نام متناظر یاد میشود. مثلا :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} = A \Rightarrow A = A^T$$

نوت : برای تشخیص متركس های متناظر , نگاه میکنیم که عناصر آن نظر به قطر اصلی باید مساوی و متناظر باشند در این صورت متناظر میباشند.

خواص ترانسپوز متركس :

1- ترانسپوز ترانسپوز يك متركس باخود آن متركس مساوی است .

$$A = [a_{ij}] \Rightarrow A^T = [a_{ji}] \Rightarrow (A^T)^T = [a_{ij}] = A \Rightarrow (A^T)^T = A$$

2- ترانسپوز حاصل جمع و حاصل تفریق دو متركس مساوی است به حاصل جمع و حاصل تفریق ترانسپوز هر متركس :

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

$$(A \pm B \pm C \pm \dots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \dots$$

3- اگر A و B دو متركس باشند داریم : $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ $(AB)^T = B^T \times A^T$

4- اگر $-A$ متضاد A باشد : $(-A)^T = -A^T$

مثال : ترانسپوز متریكس های A و B را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

دیترمینانت

اگر یک متریكس A به عدد حقیقی نسبت داده شود به نام دیترمینانت متریكس A یاد میشود. دیترمینانت متریكس A را به یکی از شکل های $|A|$ یا $\det A$ نشان میدهند. به همین ترتیب اگر یک متریكس $n \times n$ داشته باشیم که دارای n سطر و n ستون باشد دیترمینانت از درجه n نامیده میشود.

محاسبه دیترمینانت متریكس های 2×2 :

دیترمینانت متریكس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت زیر تعریف میشود.

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال : دیترمینانت متریكس $|A| = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (3 \times 2) - (4 \times 7) = -22$$

محاسبه دیترمینانت متریكس های 3×3

ابتدا یک سطر و ستون را به صورت دلخواه انتخاب میکنیم تقاطع این سطر و ستون یک عنصر میشود حال این سطر و ستون را از متریكس حذف میکنیم. چهار عنصر دیگر میماند دیترمینانت این چهار عنصر را به همان حالتی که هستند را محاسبه میکنیم در پایان این دیترمینانت را در $(-1)^{i+j} a_{ij}$ ضرب میکنیم، این عمل برای دو سطر و یا دو ستون متقاطع همان سطر و ستون اول که انتخاب کردیم اجرا میشود و در آخر همه قیمت های دریافت شده را باهم جمع میکنیم که دیترمینانت متریكس 3×3 مورد نظر مییاشد.

مثال : مقدار دیترمنانت $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ را محاسبه کنید.

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} &\Rightarrow (-1)^{1+3}(-3) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3(-5-4) = -3(-9) = +27 \\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} &\Rightarrow (-1)^{1+2}(6) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -6(35-8) = -6(27) = -162 \\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} &\Rightarrow (-1)^{1+1}(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 2(7+2) = 2(9) = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |A| = 27 - 162 + 18 = -117$$

محاسبه دیترمنانت به روش ساروس

در این روش دو ستون اول دیترمنانت را درست راست به صورت زیر تکرار میکنیم .

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

سپس عناصر قطرهای اصلی را باهم ضرب کرده و حاصل آنها را با هم جمع میکنیم همین عمل را برای قطرهای فرعی انجام میدهیم . در پایان این دو قیمت را از هم تفریق میکنیم که دیترمنانت متریکس A بدست می آید.

$$|A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

در این روش به جای استفاده از ستون های اول و دوم میتوانیم از دو سطر اول و دوم استفاده کنیم به این ترتیب که آنها را در زیر دیترمنانت تکرار کرده مانند فوق عمل میکنیم .

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

مثال : دیترمنانت زیر را به روش ساروس به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

$$|A| = ((3)(3)(6) + (2)(0)(5) + (-1)(-4)(-2)) - ((-1)(3)(5) + (3)(0)(-2) + (2)(-4)(6)) \Rightarrow$$

$$|A| = (54 - 8) - (-15 - 48) = 46 - (-63) = 46 + 63 = 109$$

خواص دیترمنانت

1- هرگاه تمام عناصر یک سطر یا ستون متریکیس $A_{m \times m}$ مساوی صفر باشند آنگاه حاصل دیترمنانت A مساوی به صفر است.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = 0$$

2- هرگاه دو سطر یا دو ستون متریکیس $A_{m \times m}$ یکسان و یا متناسب باشند دیترمنانت A مساوی به صفر است.

$$\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a & ka & d \\ b & kb & e \\ c & kc & f \end{vmatrix} = 0$$

3- اگر عناصر یک سطر یا ستون متریکیس $A_{m \times m}$ مضربی از عناصر سطر یا ستون دیگر باشند آنگاه $|A| = 0$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

4- دیترمنانت A و A^T باهم مساوی اند : $|A| = |A^T|$

5- هرگاه در یک دیترمنانت جای دو سطر و یا دو ستون متوالی و غیر متوالی را با یک دیگر تعویض نماییم علامه دیترمنانت تغییر میکند.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & k \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

6- اگر عددی ثابت مانند K در یک دیترمینانت ضرب شود این عدد تنها در یک سطر یا ستون دلخواه دیترمینانت ضرب خواهد شد. به همین ترتیب میتوانیم در یک دیترمینانت از عامل مشترک در یک سطر یا ستون دلخواه مشترک گرفت.

$$k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kb & ka & kc \\ e & d & f \\ h & g & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kd & e & f \\ ka & b & c \\ kg & h & k \end{vmatrix}$$

مثال : از دیترمینانت $|A|$ فاکتور بگیرید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

معکوس ضربی متريکس های 2×2 :

تعريف : متريکس مربعی $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ را در نظر گرفته اگر متريکس مربعی B وجود داشته باشد به طوری که $AB = BA = I_{n \times n}$ در این صورت B را معکوس ضربی متريکس A گویند و آن را به شکل A^{-1} نشان می دهند , بنابر این خواهیم داشت : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n \times n}$

متريکس مربعی A را منفرد گویند هرگاه $|A| \neq 0$ و غیر منفرد یا منظم گویند هرگاه $|A| = 0$ باشد. بنابر این برای معکوس پذیر بودن یک متريکس باید دو شرط برقرار باشد : اولاً مربعی باشد , ثانياً دیترمینانت آن خلاف صفر باشد .

مثال : نشان دهید اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ معکوس یکدیگر است .

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-7) + (3)(-2) & (-1)(-3) + (3)(-1) \\ (2)(-7) + (-7)(-2) & (2)(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-7)(-1) + (-3)(2) & (-7)(3) + (-3)(-7) \\ (-2)(-1) + (-1)(2) & (-2)(3) + (-1)(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2}$$

دیده می شود که : $AB = BA = I_{2 \times 2}$ پس گفته میتوانیم A و B معکوس یکدیگر اند.

متوصله (الحاقی) یک متریكس

برای دریافت متریكس متوصله یا الحاقی ($Adjoint$)، مرتبه و جاهای سطر و ستون قطر اصلی را تغییر داده و عناصر قطر فرعی را با تغییر علامه مینویسیم. متریكس جدید که به دست می آید عبارت از متریكس الحاقی مینامند به طور مثال :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow Adj k = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

در هر متریكس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که دیترنانت آن خلاف صفر باشد: $|A| \neq 0$ بنابراین متریكس معکوس پذیر است معکوس متریكس A از رابطه زیر بدست می آید:

$$|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA$$

مثال : اگر $|A| = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ باشد، معکوس ضربی متریكس A را دریابید.

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 10 = -8 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

حل سیستم معادلات خطی با استفاده از معکوس متریكس

سیستم معادلات دو مجهوله $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ را در نظر میگیریم؛ حالا متریكس ضرایب، متریكس مجهولها و متریكس حدود ثابت را مینویسم :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B, |A| \neq 0$$

با استفاده از معادله $X = A^{-1}B$ ، مجهول های X و Y را دریافت میکنیم به شرط اینکه $|A| \neq 0$

مثال : سیستم معادلات دو مجهوله $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ را با استفاده از معكوس متریكس حل نمایید .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 5 + (-2) \times 7 \\ (-1)(5) + 1 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

مثال : قیمت X و Y را در سیستم ذیل دریافت نمایید .

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad |A| = (2)(-6) - (-3)(4) = 0$$

چون $|A| = 0$ میباشد پس متریكس A معكوس ندارد , در نتیجه سیستم معادلات حل ندارد .

حل سیستم معادلات به طریق کرامر

سیستم معادلات سه مجهوله زیر را در نظر گرفته و متریكس ضرایب و متریكس مقادیر ثابت را مینویسیم.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

مقادیر X, Y, Z را میتوانیم از روابط زیر بدست آورده به شرط اینکه $|A| \neq 0$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

در روابط بالا $|A_x|, |A_y|, |A_z|$ را به ترتیب دترمینانت متریكس های متناظر به X, Y, Z مینامند. برای محاسبه $|A_x|$ به جای ستون اول ستون مقادیر ثابت را قرار داده , دترمینانت متریكس جدید را به دست می آوریم . و برای محاسبه $|A_y|$ به جای ستون دوم , ستون مقادیر ثابت را قرار داده , دترمینانت متریكس جدید را بدست می آوریم به همین ترتیب برای محاسبه $|A_z|$ به جای ستون سوم , ستون مقادیر ثابت را قرار داده دترمینانت متریكس جدید را بدست می آوریم .

مثال : حل سیستم معادلات $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ را به قاعده کرامر بدست آورید.

$$\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9, |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{9}{7} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-4}{7}$$

مثال : سیستم معادلات زیر را به قاعده کرامر بدست آورید.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (-9-4+4) - (12+6+2) = -9-20 = -29 \Rightarrow |A| = -29$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |A_x| = (12-22+20) - (66-8+10) = 10-68 = -58 \Rightarrow |A_x| = -58$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} \Rightarrow |A_y| = (-15-8+22) - (20+33+34) = -1-57 = -58 \Rightarrow |A_y| = -58$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |A_z| = (99-20-8) - (-24+30-22) = 71-(-16) = 87 \Rightarrow |A_z| = 87$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{87}{-29} = -3 \Rightarrow z = -3$$

حل سیستم معادلات خطی به طریق حذفی Gouse :

برای حل سیستم معادلات به طریق حذفی Gouse ابتدا متریکس ضرایب و مقادیر ثابت را کنار هم نوشته به ترتیب طی چند مرحله به انجام دادن عملیه های ضرب، جمع یا تفریق، تقسیم یا تغییر دادن جاهای سطرها بایک دیگر، دریک سطر دلخواه ضرایب مجهولات به جز یک مجهول صفر شده (برای یک مجهول ضریب میماند) و دراین حالت، قیمت این مجهول دریافت میشود همین عمل را برای سطرهاى دیگر انجام داده تا مجهولات دیگر بدست آید به عبارتی عناصر زیر قطر اصلی اول صفر شوند. تا قیمت های مجهولات دریافت شوند. (سطرهاى متریکس را به $R_1, R_2, \dots$ نشان میدهیم).

مثال : سیستم معادلات $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ را به روش حذفی (Gouse) حل کنید.

$$\begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_2]{R_1 - R_2 \rightarrow R_2} \begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ -y = -2 \Rightarrow y = 2 \end{array} \Rightarrow x + 2(2) = 5 \Rightarrow x = 5 - 4 = 1 \Rightarrow x = 1$$

مثال : سیستم معادلات زیر را به روش حذفی (Gouse) حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 2x + 7y + 12z = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 24 \end{bmatrix} \\ R_3 \begin{bmatrix} 2 & 7 & 12 & 40 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_3]{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & -12 \end{bmatrix} \\ R_3 \begin{bmatrix} 2 & 7 & 12 & 40 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[R_3]{-R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & -12 \end{bmatrix} \\ R_3 \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 22 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_3]{R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & -12 \end{bmatrix} \\ R_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

سیستم حل ندارد $0x + 0y + 0z = 10 \Rightarrow 0 = 10$

مثال : سیستم معادلات سه مجهوله زیر را به روش گوس حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 11 \end{bmatrix} \\ R_3 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_3]{-3R_1 + 2R_2 \rightarrow R_2} \begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \\ R_3 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[R_3]{-2R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \\ R_3 \begin{bmatrix} 0 & -8 & 3 & -7 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_3]{-8R_2 + 7R_3 \rightarrow R_3} \begin{array}{l} R_1 \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ R_2 \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \\ R_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -35 & -105 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow -35z = -105 \Rightarrow z = \frac{-105}{-35} = 3 \Rightarrow z = 3$$

$$R_2 \Rightarrow -7y + 7z = 7 \Rightarrow -y + z = 1 \Rightarrow -y = 1 - z \Rightarrow y = z - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$R_1 \Rightarrow 2x + 3y - z = 5 \Rightarrow 2x + 3(2) - 3 = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 3 \Rightarrow x = 1$$

مثال : متریكس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ دارای 2 سطر و 3 ستون است بنابر این به صورت معیاری میتوانیم

بگوییم که : 2×3 و همچنین دارای 6 عنصر نیز میباشد.

$$a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{13} = -1, a_{21} = 2, a_{22} = 4, a_{23} = 3$$

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{سطر اول} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{سطر دوم} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ستون اول

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ستون دوم

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ستون سوم

مثال : متریكس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -i & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ ستی از اعداد مختلط تعریف شده است و میتوانیم بگوییم که این یک متریكس 3×3 است و همچنین دارای 9 عنصر میباشد.

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ پس مقادیر a_{13} و a_{32} را تعیین نمائید؟

حل : a_{13} در سطر اول و ستون سوم قرار دارد پس داریم که : $a_{13} = -2$
 a_{32} در سطر سوم و ستون دوم قرار دارد پس داریم که : $a_{32} = 6$

مثال : اگر $\begin{bmatrix} x^2 - 1 & 3 \\ 4 & y + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 - y \end{bmatrix}$ باشد پس جوهره (x, y) را بیابید؟

حل : زمانی دو متریكس با هم مساوی میباشند عناصری که در هر موقعیت قرار دارند با هم مساوی باشند پس داریم که :

$$y + 2 = 6 - y \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \quad \text{و} \quad x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

در نتیجه بدست میآوریم که : $(x, y) = (2, 2)$ یا $(x, y) = (-2, 2)$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد اگر امکان دارد $A + B$ و $B + C$ را بدست آورید؟

حل : در حالت اول چون A و B دارای سطر و ستون مساوی اند پس میتوانیم به صورت ذیل $A + B$ را بدست آوریم :

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 2+1 & -1+0 \\ 2+4 & 3+3 & 0+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

اما در حالت دوم چون ستون و سطر B و C با هم مساوی نیستند ما نمیتوانیم که آنها را با هم جمع نمائیم.

مثال : اگر $\begin{bmatrix} -2 & x-y \\ x-y & -6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ x-1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ باشد پس x و y را حاصل نمائید؟

حل :

$$\begin{bmatrix} -2 & x-y \\ x-y & -6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ x-1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & x-y \\ x-y & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -2x+2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & x-y-8 \\ -x-y+2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y-8=10 \\ -x-y+2=8 \end{cases} \Rightarrow y=-12, x=6$$

مثال : اگر $2x - 6 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ باشد پس متریكس x را بیابید؟

$$2x - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -6 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -6 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2x = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = [(1 \cdot 2 + (-2)(-1) + 3 \cdot 5)] = [19]_{1 \times 1}$$

مثال :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 & 3 \cdot 7 \\ 4 \cdot 5 & 4 \cdot 6 & 4 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 15 & 18 & 21 \\ 20 & 24 & 28 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ باشند پس حاصل ضرب $A \cdot B$ را بدست آورید؟
حل :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \\ -1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & -1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -7 & 8 \\ 9 & 11 & -11 \end{bmatrix}$$

مثال : اگر $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & x-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ باشد پس قیمت y را بدست آورید؟
حل :

$$\begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & x-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+xy \\ 4+xy-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2+xy=3 \\ 4+xy-y=0 \end{cases} \Rightarrow y=5$$

$$I_1 = [1] , I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{نکته :}$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $f(x) = x^2 - x + 3I_2$ باشد پس متریكس $f(A)$ را بدست آورید؟
حل :

$$f(A) = A^2 - A + 3I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال : در صورتیکه معکوس ضربی متریكس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ موجود باشد آنرا بدست آورید؟

حل : از آنجایی که ما داریم : $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$ و $d = 4$, $ad - bc = -4 - 6 = -10$, بنابراین داریم که :

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال : در صورتیکه معكوس ضربی متركس $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ موجود باشد آنرا بدست آورید؟

حل : در متركس $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ داریم كه : $a = -2$, $b = 6$, $c = -3$ و $d = 9$ همچنان نظر به اینکه

$$ad - bc = (-2) \cdot 9 - (-3) \cdot 6 = -18 + 18 = 0$$

است پس متركس A معكوس ندارد.

مثال : اگر $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ باشد پس قیمت X را بدست آورید؟

حل :

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابر این بدست آورده می‌توانیم كه :

$$X = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال : ترانسپوز متركس های ذیل را بدست آورید.

1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2) $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$B^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

نكته : حل خطی معادله نوشته شده $A \cdot X = B$ را می‌توانیم توسط روش حذفی گوس بدست آوریم.
روش حذفی گوس به شكل ذیل می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & a'_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$$

$$x + y - 2z = 1$$

مثال : سیستم معادله $2x - y + z = 0$ را توسط عملیات سطر ابتدایی حل نمائید؟

$$x + y - 3z = -2$$

حل :

$$\begin{aligned} ((-2)R_1 + R_2 \rightarrow R_2) \\ ((-2)R_1 + R_3 \rightarrow R_3) \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$((- \frac{1}{3})R_2 \rightarrow R_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$((-1)R_3 \rightarrow R_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} z = 3 \Rightarrow y - \frac{5}{3}z = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{17}{3} \\ x + y - 2z = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

مثال : قیمت دیترمینانت متریکس های ذیل را بدست آورید؟

1) $A = [2]$

$$|A| = 2$$

2) $B = [-4]$

$$|B| = -4$$

3) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -11$$

مثال : معادلات ذیل را برای x حل نمائید؟

1) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 4$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow x(x-1) - 2 \cdot 1 = x^2 - x - 2 = 4$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ \& } x = -2$$

$$2) \left| \begin{array}{cc} \frac{x-1}{2} & 1 \\ -3 & 2 \end{array} \right| = 9$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{x-1}{2} & 1 \\ -3 & 2 \end{array} \right| = 9 \Rightarrow 2 \left| \frac{x-1}{2} \right| + 3 = 9 \Rightarrow \left| \frac{x-1}{2} \right| = 3$$

$$\frac{x-1}{2} = 3 \text{ or } \frac{x-1}{2} = -3 \Rightarrow x = 7 \text{ or } x = -5$$

مثال : قیمت دیترمینانت متریكس را بیابید؟

حل :

$$x = 965 \Rightarrow \begin{vmatrix} 965 & 966 \\ 967 & 968 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{vmatrix} = x(x+3) - (x+2)(x+1)$$

$$= x^2 + 3x - x^2 - 3x - 2 = -2$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ باشد پس قیمت دیترمینانت A را دریافت کنید؟

حل :

$$\begin{aligned} |A| &= 0(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 3(0 - 4) + 6(0 + 2) = 12 + 12 = 24 \end{aligned}$$

مثالها

1- مرتبه هر یک از متریکس‌های زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{3 \times 2}$$

$$D = (d_{ij})_{2 \times 2}$$

$$B = (b_{ij})_{3 \times 1}$$

$$E = (e_{ij})_{3 \times 3}$$

$$C = (c_{ij})_{2 \times 3}$$

$$F = (f_{ij})_{2 \times 3}$$

حل:

2- متریکس‌های زیر را به صورت جدول مستطیلی بنویسید.

$$1) \quad (a_{ij})_{2 \times 2} = (i + j)_{2 \times 2}$$

$$a_{11} = 1 + 1 = 2$$

$$a_{12} = 1 + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = 2 + 1 = 3$$

$$a_{22} = 2 + 2 = 4$$

$$2) \quad (a_{ij})_{3 \times 2} = (i \cdot j)_{3 \times 2}$$

$$a_{11} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$a_{12} = 1 \cdot 2 = 2$$

$$a_{21} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_{22} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_{31} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$a_{32} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3) (2i + 3j)_{3 \times 3}$$

$$a_{11} = 2 + 3 = 5$$

$$a_{21} = 4 + 3 = 7$$

$$a_{31} = 6 + 3 = 9$$

$$a_{12} = 2 + 6 = 8$$

$$a_{22} = 4 + 6 = 10$$

$$a_{32} = 6 + 6 = 12$$

$$a_{13} = 2 + 9 = 11$$

$$a_{23} = 4 + 9 = 13$$

$$a_{33} = 6 + 9 = 15$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$4) \left(\frac{1}{j} \right)_{3 \times 3}$$

$$a_{11} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_{21} = \frac{2}{1} = 2$$

$$a_{31} = \frac{3}{1} = 3$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_{32} = \frac{3}{2}$$

$$a_{13} = \frac{1}{3}$$

$$a_{23} = \frac{2}{3}$$

$$a_{33} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

5) از تساوی دو متریکس زیر a و b را دریافت کنید.

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

متریکس‌های زیر را از نظر مرتبه بنام‌های مربوط، مشخص کنید.

$$1) D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{متریکس سکالر } K = 3$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{متریکس مربعی } 3 \times 3$$

$$3) E = (5 \quad -6 \quad 7 \quad 8) \quad \text{متریکس سطری } 1 \times 4$$

4) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ متریکس مربعی صفر 3×3

5) $F = [1 \quad 2]$ متریکس سطری 1×2

6) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ متریکس واحد I_3

7) $H = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ متریکس مربعی 2×2

8) $G = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ متریکس ستونی 4×1

9) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = C_{3 \times 2}$

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

11) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

$$12) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$13) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

14) وكتورهای A و B را با هم جمع کنید.

چون A و B هم مرتبه نمی باشند بناءً قابلیت جمع وجود ندارد

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A + B = \text{قابلیت جمع وجود ندارد}$$

15) ضرب یک متریكس در اسكالر:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, K = 2 \quad K \cdot A = ? \quad K \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$16) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \alpha = 3 \quad \beta = 2 \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

$$\alpha(\beta A) = 3 \left[2 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha\beta)A = (3 \cdot 2) \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha A) = 2 \left[3 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -9 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$17) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = 2 \quad \beta = 1$$

$$\alpha A + \beta B = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$18) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = 3$$

$$\Rightarrow KA = 3 \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{K}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

ضرب دو متریکس:

$$19) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \quad A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$20) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$21) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 5 & 21 \\ 27 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

$$22) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$23) \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (3 \quad -2 \quad 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -7 \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

ترانسپوز متریکس‌های ذیل را دریافت کنید.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$6) \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

دیترمینانت: متریکس‌های ذیل را محاسبه کنید.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -27$$

$$2) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -22$$

$$3) \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (12 + 3)4 - (4 + 15)(-1) + (2 - 30)7 = -117$$

$$4) \quad |M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (3 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 5 + (-1)(-4)(-2)) - ((-1)3 \cdot 5 + 3 \cdot 0(-2) + 2(-4)6) \\ = (54 + 0 - 8) - (-15 + 0 - 48) = 46 + 63 = 109$$

$$5) \quad |A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 3 + 0) - (0 - 12 - 1) = 1 - (-13) = 1 + 13 = 14$$

$$6) \quad |C| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-6 + 3 + 0) - (0 - 15 + 12) = -3 - (-3) = -3 + 3 = 0$$

$$7) \quad |d| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 28 + 20) - (2 + 0 - 60) = 48 - (-58) = 48 + 58 = 106$$

$$8) \quad |e| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (42 + 0 - 6) - (-48 + 0 - 35) = 36 + 83 = 119$$

$$9) \quad |b| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3 + 14 - 30) - (-3 + 14 - 30) = -19 - (-19) = -19 + 19 = 0$$

$$10) \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{خواص دیترمینانت دو سطر برابر}$$

$$11) \quad |b| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$12) \quad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{خواص دیترمینانت یک سطر صفر}$$

$$13) \quad |C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$14) \quad |c| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (3 \cdot 4 + 0 + 0) - (0) = 12$$

معکوس ضربی متریکس‌های زیر را دریافت کنید.

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-3)6 - (-2)5 = -18 + 10 = -8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 5(-2) - (-10) = -10 + 10 = 0$$

این متریکس معکوس پذیر نمی‌باشد زیرا $|A| = 0$ شده است.

$$3) \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 5 \cdot 15 - (4 \cdot 19) = 75 - 76 = -1$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj } B = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & +19 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$4) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = 1 - 6 = -5 \quad \text{Adj } C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \text{Adj } C = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$5) \quad E = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |E| = -3 - 2 = -5 \quad \text{Adj } E = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{|E|} \text{Adj } E = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$6) \quad F = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |F| = -1 - (-3) = -1 + 3 = +2 \quad \text{Adj } F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{|F|} \text{Adj } F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

حل سیستم معادلات با استفاده از معکوس متریکس:

$$1) \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{متریکس ضرایب} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$|A| = 3 - 2 = 1 \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -5 - (-6) = -5 + 6 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 - (-12) = -12 + 12 = 0$$

چون دیترمینانت صفر شده است پس متریكس معكوس ندارد و بنابر این سیستم حل ندارد.

$$4) \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-5) = -4 + 5 = 1 \quad A^{-1} = \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -12 - (-10) = -12 + 10 = -2 \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5/2 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1 - 4 = -5, \quad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

حل سیستم معادلات به طریق کرامر

$$1) \quad \begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-6) = 1 + 6 = 7$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3 + 6}{7} = \frac{9}{7}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 - 6}{7} = -\frac{4}{7}$$

$$2) \quad \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{6 + 15}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{7} = \frac{10 - 3}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$3) \begin{cases} 3x - 2y + 2z = -4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -58$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -58$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 87$$

$$\begin{cases} x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2 \\ y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2 \\ z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{87}{-29} = -3 \end{cases}$$

سوالات متریکس

1- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $A \cdot B$ کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 2 & -9 & 4 \end{bmatrix}$

2- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $|A|$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) 33 (B) 32 (C) 35 (D) 36

3- معکوس متریکس $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

4- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ باشند مقدار $A + B$ کدام است ؟

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

5- هر گاه $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $A + 2B$ عبارت است از :

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

6- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $2a + b + c - 2d$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) -2

7- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد در رابطه $x + 2A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ مقدار X برابر به کدام یک از

موارد ذیل است ؟

(A) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

8- هر گاه $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد حاصل ضرب دو متریكس کدام است ؟

(A) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 12 & 28 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

9- معكوس متریكس $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ کدام است ؟

(A) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$

10- هر گاه $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد مقدار A^{16} برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) $2^8 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $2^8 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $2^{16} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $2^8 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11- حاصل دیترمینانت $A = \begin{bmatrix} x+2y & x+y \\ x-2y & x-y \end{bmatrix}$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) x (B) xy (C) $2xy$ (D) $2x$

12- مقدار x را در دیترمینانت $|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix} = 9$ پیدا کنید .

(A) -1 (B) -2 (C) 1 (D) 2

13- در $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-2 \\ 0 & -1 & 3 \\ x+2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ مقدار x برابر است به :

(A) $\{-1\}$ (B) $\{-2\}$ (C) $\{-1, -2\}$ (D) $\{-1, 3\}$

14- معكوس متریكس $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (D) هیچکدام

15- حاصل دیترمینانت $A = \begin{bmatrix} 2y & 2(y^2 + y + 1) \\ 2 & 2(y + 1) \end{bmatrix}$ برابر است به :

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -4

16- اگر $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $x + y + z$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

17- اگر $\det A = 400$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 0 & -a \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ باشد مقدار a برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) 10 (B) 12 (C) 18 (D) 20

18- حاصل دیتر مینانت $\begin{bmatrix} 2005 & 2001 \\ 2001 & 2005 \end{bmatrix}$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) 16024 (B) 16016 (C) 16076 (D) 16000

19- حاصل دیتر مینانت $\begin{bmatrix} \log_3 4 & -3 \\ 5 & \log_4 9 \end{bmatrix}$ مساوی میشود به :

- (A) 16 (B) 17 (C) 15 (D) 14

20- اگر $\begin{bmatrix} 7 & c \\ 3 & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2 \\ d-c & 1 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $a \cdot b \cdot c \cdot d$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) 80 (B) 100 (C) 120 (D) 110

21- حاصل دیتر مینانت $\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) 0

22- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $A \cdot B$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \\ 12 & 6 & 14 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 12 & 6 & 14 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \\ 12 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 12 & 9 & 14 \end{bmatrix}$

23- حاصل $\begin{vmatrix} 108765 & 108766 \\ 108763 & 108764 \end{vmatrix}$ برابر است به :

- (A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 0

24- حاصل $\begin{vmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{vmatrix}$ عبارت است از :

- (A) 2002 (B) 2012 (C) 2001 (D) 2003

25- اگر $A = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$ باشد مقدار A^5 برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) $3^4 A$ (B) $3^5 A$ (C) 3^4 (D) 3^{40}

26- مقدار دیترمینانت $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

27- معکوس دیترمینانت $A = \begin{bmatrix} \tan \alpha & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) $\begin{bmatrix} \tan \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \tan \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \cot \alpha & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (D) هیچکدام

28- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & x & -3x \\ -y & 10 & 14 \end{bmatrix}$ باشد و رابطه $a_{22} + a_{23} = a_{31}$ مقدار y برابر به کدام یک از موارد ذیل

است ؟

- (A) x (B) $2x$ (C) 0 (D) $-x$

29- معکوس متریکس $A = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) $\begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$

30- مقدار a در دیترمینانت $\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 46$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) 11 (B) 12 (C) -11 (D) -12

31- حاصل دیترمینانت $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

32- حاصل دیترمینانت $\begin{bmatrix} 2004 & 2003 \\ 2001 & 2002 \end{bmatrix}$ عبارت است از :

- (A) 3999 (B) 3005 (C) 4005 (D) 5004

33- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ و نیز $C = 3A - 2B$ باشد مقدار C برابر به که کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) $\begin{bmatrix} 4 & -11 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 4 & -11 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & -7 & -1 \\ -4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

34- اگر $A = \begin{bmatrix} x+1 & 2 \\ -3 & 2y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} z-2 & z \\ -3 & 2x \end{bmatrix}$ و رابطه $A = B$ باشد قیمت $x + y + z$ برابر است به :

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) -2

35- اگر $A = A^{-1}$ $A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & b \end{bmatrix}$ باشد رابطه $a - b$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

36- اگر $2A + x = B$, $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد قیمت x برابر به کدام یک از موارد ذیل

است ؟

(A) $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -9 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -7 & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

37- حاصل $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

38- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد مقدار A^{32} برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) $I_{2 \times 2}$ (B) $2^{16} \cdot I_{2 \times 2}$ (C) $3^{16} \cdot I_{2 \times 2}$ (D) $4^{16} \cdot I_{2 \times 2}$

39- هرگاه $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ باشد مقدار A^{100} برابر است به :

(A) $10^{50} \cdot I_{2 \times 2}$ (B) $12^{50} \cdot I_{2 \times 2}$ (C) $14^{50} \cdot I_{2 \times 2}$ (D) $13^{50} \cdot I_{2 \times 2}$

40- اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $B^T \cdot A$ مساوی است به :

(A) $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ -11 & 16 \end{bmatrix}$

41- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$ باشد مقدار A^{-1} کدام است ؟

(A) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

42- هرگاه $\begin{bmatrix} 5 & y \\ 2x & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & z-1 \\ 4y & z \end{bmatrix}$ باشد مقدار $x+y+z$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14

43- اگر $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $2A + A^T$ مساوی به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) $\begin{bmatrix} -11 & 4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -12 & 9 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -9 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

44- هرگاه $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $(A \cdot B)^{12}$ مساوی است به :

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\frac{1}{64} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $2^8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $2^{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

45- اگر $\begin{bmatrix} x+1 & -1 \\ 3y & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 8 \end{bmatrix}$ باشد قیمت $x+y$ برابر به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) -2 (B) -3 (C) -4 (D) -5

46- هرگاه $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ باشد پس مقدار $(A^T)^T$ مساوی به کدام یک از موارد ذیل است ؟

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

47- حاصل $[(AB)^T + B^T \cdot A^T]^T$ برابر است به :

(A) AB (B) $2AB$ (C) BA (D) $2BA$

48- حاصل $(AB)^T + (-B^T \cdot A^T)$ مساوی است به :

(A) 0 (B) BA (C) AB (D) I

49- $(\underbrace{A+A+A+\dots+A}_n)^T$ مساوی میشود به :

(A) $n^2 A^T$ (B) $n A^T$ (C) $n^n A^T$ (D) $n A$

اعداد موهومی (Imaginary Numbers)

اعدادی به شکل ai را اعداد موهومی میگویند. که در اینجا $i^2 = -1$ یا $i = \sqrt{-1}$ قرار داده شده است حرف i از کلمه یونانی (iota) گرفته شده است که i را واحد اعداد موهومی میگویند. حرف a نمایش یک عدد حقیقی می باشد: $a \in \mathbb{R}$

مثال: اعداد $3i, -\sqrt{5}i, -36i, \frac{2}{3}i$ نمایش یک عدد موهومی می باشد.

ه $\sqrt{-16} = 4i \Rightarrow i\sqrt{16} = i\sqrt{16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = \sqrt{(-1)(16)} = \sqrt{-16}$ را در یابید. مثال $\sqrt{-16}$:

طاقة های i :

با در نظر داشت $i^2 = -1$ یا $i = \sqrt{-1}$ میتوانیم طاقتهای i را ساده تر کنیم به این ترتیب که ابتدا طاقتهای i را به عدد 2 تقسیم میکنیم سپس با توجه به اینکه $i^2 = -1$ است افاده مورد نظر ساده میشود:

$$i^n = i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k \Rightarrow i^n = \begin{cases} 1 & (k \text{ عدد جفت}) \\ -1 & (k \text{ عدد تاق}) \end{cases} \quad n = 2k$$

$$i^n = i^{2k+1} = i^{2k} \cdot i = (i^2)^k \cdot i = (-1)^k \cdot i \Rightarrow i^n = \begin{cases} i & (K \text{ عدد جفت}) \\ -i & (k \text{ عدد تاق}) \end{cases} \quad n = 2k + 1$$

مثال: $i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$ را دریابید.

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = (-1)i = -i & i^4 &= (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 & i^5 &= (i^2)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = i \\ i^6 &= (i^2)^3 = (-1)^3 = -1 & i^7 &= (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = -i & i^8 &= (i^2)^4 = (-1)^4 = 1 \end{aligned}$$

مثال: i^{61}, i^{-37}, i^{256} را دریابید.

$$i^{61} = i^{60} \cdot i = (i^2)^{30} \cdot i = (-1)^{30} \cdot i = i \quad i^{-37} = \frac{1}{i^{37}} = \frac{1}{i^{36} \cdot i} = \frac{1}{(i^2)^{18} \cdot i} = \frac{1}{(-1)^{18} \cdot i} = \frac{1}{i} = i^{-1}$$

$$i^{256} = (i^2)^{128} = (-1)^{128} = 1$$

مثال: نشان دهید که مربع اعداد موهومی منفی میباشد.

$$(ai)^2 = a^2 i^2 = a^2 (-1) = -a^2 < 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

اعداد مختلط

مجموعه اعداد حقیقی و موهومی را ست اعداد مختلط (Complex Numbers set) میگویند.

اگر یک عدد مختلط را به حرف Z نمایش دهیم شکل معیاری یک عدد مختلط به صورت $(z = a + bi)$ می باشد که: $a, b \in \mathbb{R}$ می باشد در این شکل عدد مختلط a قسمت حقیقی عدد مختلط (Real part of z) و bi قسمت موهومی عدد مختلط (Imaginary part of z) می باشد.

$$\operatorname{Re}(z) = a, \operatorname{im}(z) = bi$$

ست اعداد مختلط به شکل ذیل تعریف میشود:

$$C = \{z | z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

عدد مختلط Z را به شکل جوره مرتب نیز میتوانیم بنویسیم:

$$z = a + bi = (a, b) \quad z = a - bi = (a, -b)$$

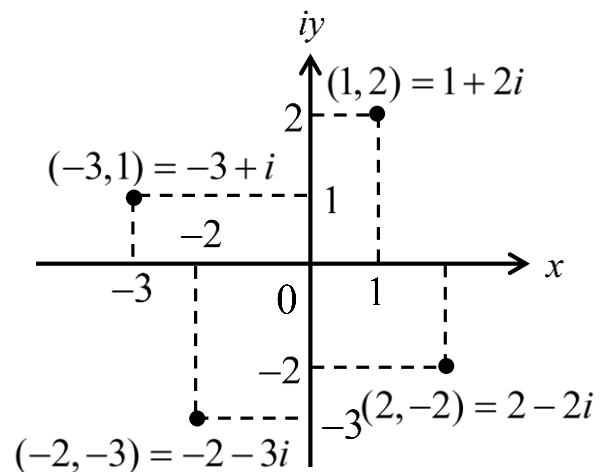
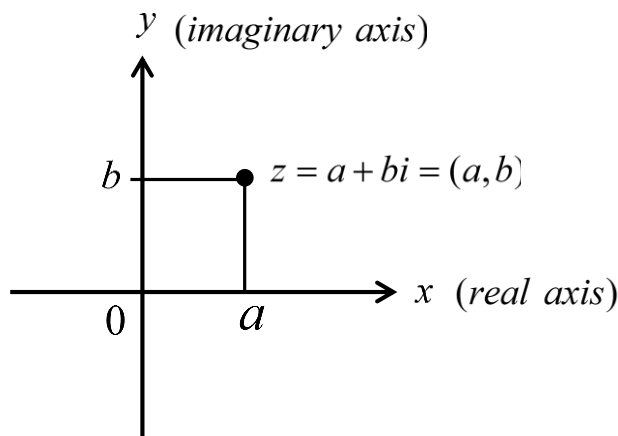
اگر $a = 0$ باشد $z = 0 + bi = bi$ یک عدد خالص موهومی (pure imaginary number) می باشد.

و اگر $b = 0$ باشد $z = a + i0 = a$ یک عدد خالص حقیقی (pure real number) می باشد.

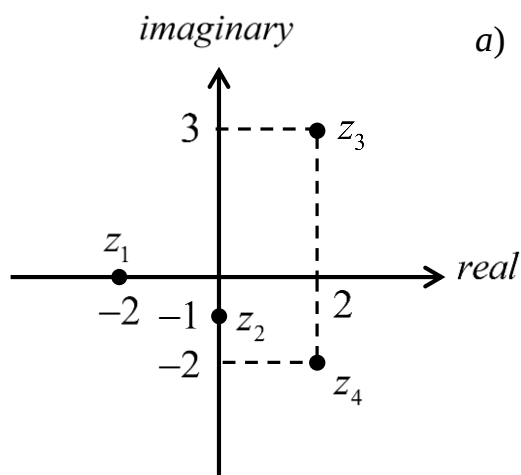
نمایش اعداد مختلط بر روی سیستم کمیات وضعیه مختلط

یک عدد مختلط را میتوانیم به همان روش که یک جوره مرتب حقیقی را در سیستم کمیات وضعیه قایم مشخص مینمودیم، ترسیم نمائیم. در این حالت محور عمودی، محور قسمت موهومی است و محور افقی محور قسمت حقیقی عدد مختلط است.

اعداد مختلط بر روی سیستم کمیات وضعیه به قسم ذیل نمایش داده میشود.



مثال : ما میتوانیم که به شکل ذیل اعداد مختلط را بر روی سیستم کمیات وضعیه رسم نمائیم.



a) $z_1 = -2$

b) $z_2 = -i$

c) $z_3 = 2 + 3i$

d) $z_4 = 2 - 2i$

عدد صفری مختلط

عددی که هر دو قسمت حقیقی و موهومی آن صفر باشد. $(a=0, b=0)$ بنابر این $z = a + bi = 0 + 0i = 0$

مثال : در اعداد مختلط $5i, \sqrt{3} - 3i, 1 - i$ قسمت های حقیقی و موهومی را نشان دهید.

در $1 - i$ قسمت حقیقی آن 1 است و قسمت موهومی آن -1 میباشد.

در عدد مختلط $\sqrt{3} - 3i$ قسمت حقیقی آن $\sqrt{3}$ و قسمت موهومی آن $-3i$ می باشد.

در عدد مختلط $5i$ قسمت حقیقی صفر و قسمت موهومی $5i$ میباشد.

مثال : اعداد مختلط $i - 1, 9 - i, 0, -9, 6i$ را به شکل معیاری اعداد مختلط بنویسید.

$$6i = 0 + 6i \quad 0 = 0 + 0i \quad -9 = -9 + 0i \quad 9 - i = 9 - i \quad i - 1 = -1 + i$$

عملیه های چهار گانه در اعداد موهومی

1- عملیه جمع : حاصل جمع دو عدد موهومی یک عدد موهومی است.

$$a_1, a_2 \in \mathbb{R} : a_1 i + a_2 i = (a_1 + a_2) i, (a_1 + a_2) \in \mathbb{R}$$

مثال : حاصل جمع های $8i, 7i$ حاصل جمع $\sqrt{7}i, 5i$ را در یابید.

$$8i + 7i = (8 + 7)i = 15i \quad \sqrt{7}i + 5i = (\sqrt{7} + 5)i$$

2- عملیه تفریق : حاصل تفریق دو عدد موهومی یک عدد موهومی است .

$$a_1, a_2 \in \mathbb{R} : a_1 i - a_2 i = (a_1 - a_2) i, (a_1 - a_2) \in \mathbb{R}$$

مثال : حاصل تفریق $7i - 4i, 9i - 13i$ را دریابید.

$$7i - 4i = (7 - 4)i = 3i \quad 9i - 13i = (9 - 13)i = -4i$$

3- عملیه ضرب : حاصل ضرب دو عدد موهومی یک عدد حقیقی است .

$$a_1, a_2 \in \mathbb{R} : (a_1 i)(a_2 i) = (a_1)(a_2) i^2 = (a_1 \cdot a_2)(-1) = -a_1 a_2 \in \mathbb{R}$$

مثال : حاصل ضرب $(\sqrt{9}i)(\sqrt{4}i), (10i) \cdot (5i)$ را دریابید.

$$(10i) \cdot (5i) = 50i^2 = 50(-1) = -50 \quad (\sqrt{9}i)(\sqrt{4}i) = \sqrt{36}i^2 = 6(-1) = -6$$

نوت : در ضرب اعداد موهومی خاصیت تبدیلی صدق میکند.

$$(ai)(bi) = (bi)(ai) = -ab$$

4- عملیه تقسیم : حاصل تقسیم دو عدد موهومی یک عدد حقیقی است .

$$a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \frac{a_1 i}{a_2 i} = \frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}$$

مثال : حاصل تقسیم $\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i}, \frac{5i}{7i}, \frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$ را بدست آورید.

$$\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} \quad \frac{5i}{7i} = \frac{5}{7} \quad \frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{7}}{\sqrt{-1}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}i}{\sqrt{5}i} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

تساوی اعداد مختلط

دو عدد مختلط وقتی باهم مساوی میباشند که قسمت های حقیقی و موهومی هر دو عدد باهم مساوی باشند .

عدهای $z_1 = a + bi$, $z_2 = x + yi$ وقتی مساوی میشوند که : $x = a$, $y = b$ باشد .

مثال : اگر $z_1 = x_1 + 2y_1 i$, $z_2 = 3 - 5i$ باشد وقتی $z_2 = z_1$ میشود که :

$$x_1 = 3 \quad 2y_1 = -5 \Rightarrow y_1 = \frac{-5}{2}$$

عملیه جمع عدد های مختلط

اگر $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ باشند در آن صورت :

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

حاصل جمع دو عدد مختلط عبارت از عدد مختلطی است که قسمت حقیقی آن از حاصل جمع قسمت های حقیقی و قسمت موهومی آن از حاصل جمع قسمت های موهومی اعداد مختلط داده شده حاصل میشود.

مثال : اگر $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + 4i$ باشد , $z_1 + z_2$ را پیدا کنید .

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3 + 4)i = 5 + i$$

$0 + 0i$ عنصر عینیت در عملیه جمع اعداد مختلط میباشد زیرا :

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$$

همچنین معکوس جمعی عدد $a + bi$ عبارت از $-a - bi$ میباشد زیرا که :

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

عملیه تفریق اعداد مختلط

اگر $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ باشند در آن صورت :

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

حاصل تفریق دو عدد مختلط عبارت از عدد مختلطی است که قسمت حقیقی آن از حاصل تفریق قسمت های حقیقی و قسمت موهومی آن از حاصل تفریق قسمت های موهومی اعداد مختلط داده شده حاصل میشود.

مثال : اگر $z_1 = -4 + 3i$, $z_2 = 6 - 7i$ باشند حاصل $z_1 - z_2$ را دریافت کنید .

$$z_1 - z_2 = (-4 + 3i) - (6 - 7i) = (-4 - 6) + (3 + 7)i = -10 + 10i$$

مثال : اگر $z_1 = 12 - 5i$, $z_2 = 8 - 3i$ باشند $z_1 - z_2$ را دریابید .

$$z_1 - z_2 = (12 - 5i) - (8 - 3i) = (12 - 8) + (-5 + 3)i = 4 - 2i$$

ضرب اعداد مختلط

اگر $z_1 = a + bi$ ، $z_2 = c + di$ باشند در آن صورت :

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \Rightarrow$$

$$z_1 z_2 = ac + (ad + bc)i - bd \Rightarrow z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

مثال : حاصل ضرب افاده $(5 - 4i)(7 - 2i)$ را به دست آورید .

$$(5 - 4i)(7 - 2i) = 35 - 10i - 28i + 8i^2 = 35 - 38i - 8 = 27 - 38i$$

چون $(a + bi)(1 + 0i) = a + a0i + bi + b0i^2 = a + bi$ میباشد بنا براین $1 + 0i$ را عنصر عینیت عملیه ضرب اعداد مختلط مینامند.

مزدوج یک عدد مختلط

مزدوج عدد مختلط $z = x + yi$ عدد $\bar{z} = x - yi$ میباشد طوری که :

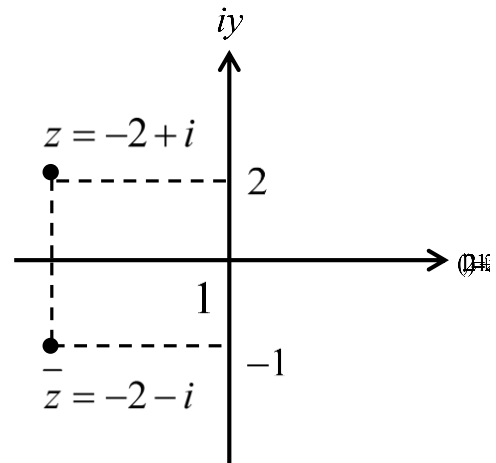
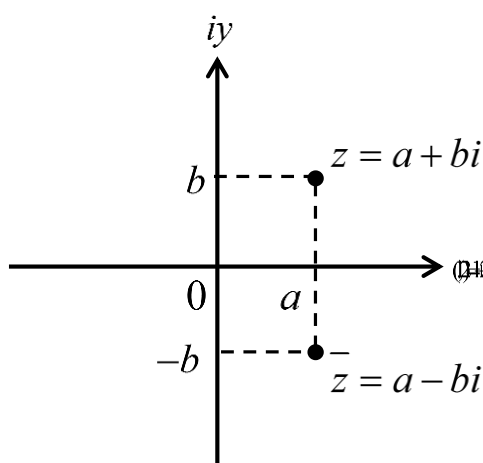
$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \Rightarrow z + \bar{z} = 2x \quad z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \Rightarrow z - \bar{z} = 2yi$$

مثال : مزدوج $z = 3 + 4i$ عبارت از $\bar{z} = 3 - 4i$ میباشد. $z \cdot \bar{z}$, $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ را به دست آرید.

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \quad z + \bar{z} = 2x = 2(3) = 6, \quad z - \bar{z} = 2yi = 2(4)i = 8i$$

دو عدد مختلط مزدوج به قسم ذیل نمایش داده میشود.



معکوس ضربی یک عدد مختلط

میدانیم که مزدوج عدد $a+bi$ عبارت از $a-bi$ است و : $(a-bi)(a+bi) = a^2 + b^2$ میباشد برای دریافت معکوس ضربی $a+bi$ عدد $\frac{1}{a+bi}$ را به شکل معیاری یک عدد مختلط مینویسیم ، پس صورت و مخرج را ضرب $a-bi$ میکنیم ($a-bi$ مزدوج مخرج میباشد).

$$\frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

معکوس ضربی عدد $(a+bi)$ عبارت از $\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \right)$ میباشد.

مثال : معکوس ضربی عدد $2-3i$ را دریابید.

$$\frac{1}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال معکوس ضربی اعداد $\sqrt{2}-4i$, $5+3i$ را دریابید.

$$5+3i \Rightarrow \frac{1}{5+3i} \cdot \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{5-3i}{25+9} = \frac{5}{34} - \frac{3}{34}i$$

$$\sqrt{2}-4i \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}-4i} \cdot \frac{\sqrt{2}+4i}{\sqrt{2}+4i} = \frac{\sqrt{2}+4i}{2+16} = \frac{\sqrt{2}}{18} + \frac{4}{18}i = \frac{\sqrt{2}}{18} + \frac{2}{9}i$$

عملیه تقسیم اعداد مختلط

برای دریافت تقسیم دو عدد مختلط ، صورت ، مخرج را در مزدوج مخرج ضرب میکنیم در نتیجه این عمل مخرج به عدد حقیقی تبدیل شده و حاصل تقسیم به شکل معیاری یک عدد مختلط بدست می آید (ناطق سازی) .

مثال : حاصل تقسیم $\frac{4+3i}{2+5i}$ را بدست آورید.

$$\frac{4+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{8-20i+6i-15i^2}{4+25} = \frac{(8+15)-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i$$

مثال : حاصل تقسیم $\frac{3+2i}{5-i}$ را بدست آورید.

$$\frac{3+2i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{15+3i+10i+2i^2}{25+1} = \frac{(15-2)+13i}{26} = \frac{13}{26} + \frac{13}{26}i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

خاصیت های مزدوج یک عدد مختلط

اگر z_1, z_2 دو عدد مختلط باشند : $z_1 = x + yi$, $z_2 = a + bi$

$$\begin{array}{llll} 1) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} & 3) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1} & 5) \overline{\overline{z}} = z & 7) z_1 - \overline{z_1} = 2yi \\ 2) \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} & 4) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} & 6) z_1 + \overline{z_1} = 2x \end{array}$$

مثال : اگر $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = -3 + 2i$ باشند نشان دهید که:

$$\left. \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 - 7i \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (-3 + 2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2 = (-12 - 10) - 7i = -22 - 7i \Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$

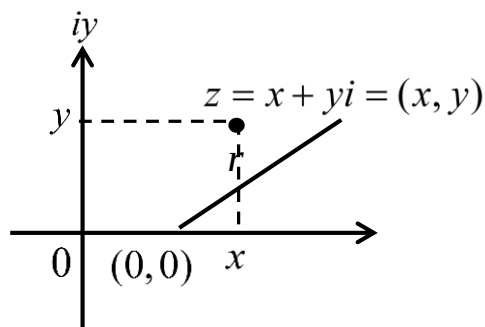
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i) \cdot (-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = (-12 - 10) + 7i = -22 + 7i \Rightarrow \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

قیمت مطلقه

فاصله بین یک عدد مختلط $z = x + yi$ و مرکز کمیات وضعیه را به نام قیمت مطلقه مینامند که توسط

فرمول ذیل میتوان آن را بدست آرئید :



$$r = |z| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

بنابر این قیمت مطلقه عبارت است از :

$$z = x + yi \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال :

$$1) \quad z = 3 + 4i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$2) \quad z = 2 - \sqrt{2}i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

$$3) \quad z = 6i = 0 + 6i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$4) \quad z = 2 + x - 3i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{(x+2)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 13}$$

مثال : اگر $z = a + 2 - 3i$ و $|z| = 5$ باشد پس قیمت a را بیابید؟

حل :

$$z = a + 2 - 3i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{(a+2)^2 + 9}$$

$$5 = \sqrt{(a+2)^2 + 9} \quad \Rightarrow \quad 25 = (a+2)^2 + 9$$

$$(a+2)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a+2 = \pm 4$$

$$a+2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \text{or} \quad a+2 = -4 \quad \Rightarrow \quad a = -6$$

حل معادله های درجه دوم یک مجهوله در ساحه اعداد مختلط :

شکل عمومی معادله درجه دوم یک مجهوله $ax^2 + bx + c = 0$ میباشد. $(\Delta = b^2 - 4ac)$

$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$	معادله دارای دو جذر حقیقی مختلف میباشد
$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$	معادله دارای دو جذر حقیقی مساوی میباشد
$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$	معادله در ست اعداد حقیقی حل ندارد ولی در ساحه اعداد مختلط دارای دو جذر مختلط میباشد

مثال : معادله $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ را حل کنید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16i^2 - 16(15) = -16 - 16(15) = -16 \times 16 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{(-1)(16)^2}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{-1}(16)}{8} = \frac{-4i \pm 16i}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i \\ x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i \end{cases}$$

مثال : معادله $x^2 + 3ix - 2 = 0$ را به کمک فورمول محمد بن موسی خوارزمی در ساحه اعداد مختلط حل کنید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9i^2 + 8 = -9 + 8 = -1 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3i \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{-3i \pm i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3i + i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i \\ x_2 = \frac{-3i - i}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i \end{cases}$$

مثال : معادله درجه دومی را پیدا کنید که جذر های آن $(3+2i), (3-2i)$ باشد .

$$\begin{cases} x_1 = 3+2i \\ x_2 = 3-2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = (3+2i) + (3-2i) = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = (3+2i)(3-2i) = 9+4 = 13 \end{cases} \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

معادله درجه دوم مورد نظر : $x^2 - 6x + 13 = 0$

مثال : معادله $x^2 - 10x + 26 = 0$ را حل کنید .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 104 = -4 < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{10 + \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \frac{10 + 2i}{2} = 5 + i \\ x_2 = \frac{10 - \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \frac{10 - 2i}{2} = 5 - i \end{cases}$$

مثال : معادله $x^2 + 9 = 0$ را حل نمائيد؟

حل : ما نيازی نداريم که Δ را پيدا نمائيم چون ميدانيم که $\Delta < 0$ است.

$$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$$

$$x = \pm 3i \Rightarrow S = \{-3i, 3i\}$$

مثال : معادله $x^4 + 17x^2 + 16 = 0$ را حل کنيد؟

حل :

$$x^4 + 17x^2 + 16 = (x^2 + 16)(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-16} = \pm 4i$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$S = \{-4i, -i, i, 4i\}$$

مثال :

$$1) \quad (2i)(3-2i) = 6i - 4i^2 = 6i + 4$$

$$2) \quad (3-2i)(2+4i) = 6 + 12i - 4i - 8i^2 = 6 + 8i + 8 = 14 + 8i$$

$$3) \quad (-4+3i) \cdot (\sqrt{-9}-2) = (-4+3i)(3i-2) = -12i + 8 + 9i^2 - 6i = -18i + 8 - 9 = -1 - 18i$$

$$4) \quad (3-\sqrt{2}i)^2 = (3-\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i) = 9 - 6\sqrt{2}i + 2i^2 = 9 - 6\sqrt{2}i - 2 = 7 - 6\sqrt{2}i$$

مثال : $(3+2i)^4 \cdot (3-2i)^4$ را محاسبه نمائيد؟

$$(3+2i)^4 \cdot (3-2i)^4 = [(3-2i)(3+2i)]^4 = (9-4i^2)^4 = (9+4)^4 = 13^4$$

حل :

مثال :

$$1) \quad \frac{3}{4i} = \frac{3 \cdot (-4i)}{4i \cdot (-4i)} = \frac{-12i}{16} = -\frac{3}{4}i$$

$$2) \quad \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i) \cdot (1+i)}{(1-i) \cdot (1+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{1+1} = \frac{2+3i-1}{2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

مثال : اگر $z = \frac{9}{(\sqrt{2}-i)^2}$ باشد $Im(z)$ را بياييد؟

$$z = \frac{9}{(\sqrt{2}-i)^2} = \frac{9}{2-2\sqrt{2}i+i^2} = \frac{9}{1-2\sqrt{2}i} = \frac{9(1+2\sqrt{2}i)}{1+8} = 1+2\sqrt{2}i$$

حل :

$$(1+2\sqrt{2}i)$$

بنا بر اين داريم که:

$$Im(z) = 2\sqrt{2}i$$

مثال : معکوس $2-5i$ را بیابید؟

$$z^{-1} = \frac{1}{2-5i} = \frac{2+5i}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2+5i}{4+25} = \frac{2+5i}{29} = \frac{2}{29} + \frac{5}{29}i$$

حل :

مثال:

$$1) \quad \sqrt{-16} = \sqrt{(-1) \cdot 16} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} = i\sqrt{16} = \pm 4i$$

$$2) \quad x^2 + a^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -a^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-a^2} = \pm \sqrt{(-1)(a^2)} = \pm a\sqrt{-1} = \pm ai$$

بیشتر بدانید!

طاقتهای i :

$$\begin{aligned} i = \sqrt{-1} &\Rightarrow i^2 = -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ i^4 &= (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = i \\ i^6 &= i^4 \cdot i^2 = (1)(-1) = -1 \\ i^7 &= i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^8 &= i^7 \cdot i = (-i)(i) = -i^2 = -(-1) = 1 \end{aligned}$$

بیشتر بدانید!

اگر توان عدد موهومی i عددی باشد که بر عدد 4 پوره قابل تقسیم باشد در آن صورت قیمت طاقت i مساوی به یک می باشد.

$$\begin{aligned} i^8 = 1, \quad i^{12} = 1, \quad i^{16} = 1 &\Rightarrow i^{4n} = 1 \\ &\Rightarrow i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = i \\ &\Rightarrow i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (i^2) = -1 \\ &\Rightarrow i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (i^2) \cdot i = -i \end{aligned}$$

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4 \cdot 13} \cdot i^2 = (1)(-1) = -1$$

$$i^{89} = i^{88} \cdot i = i^{4 \cdot 22} \cdot i = (1)(i) = i$$

$$i^{1998} = i^{4 \cdot 499} \cdot i^2 = -1$$

$$i^{256} = i^{4 \cdot 64} = 1$$

$$i^{-37} = \frac{1}{i^{37}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 9} \cdot i} = \frac{1}{i}$$

$$(i)^{-33} = \frac{1}{i^{33}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 8} \cdot i} = \frac{1}{(1)(i)} = \frac{1}{i}$$

$$i^{79} = i^{4 \cdot 19} \cdot i^3 = (1)(i^2)(i) = (1)(-1)(i) = -i$$

$$i^{202} = i^{4 \cdot 50} \cdot i^2 = (1)(i^2) = (1)(-1) = -1$$

$$(2i)^2 = 4i^2 = 4(i^2) = 4(-1) = -4$$

$$(3i^2) = 9i^2 = 9(i^2) = 9(-1) = -9$$

اعداد مختلط ذیل را به شکل معیاری آن بنویسید.

$$(z = a + bi)$$

$$\begin{cases} 6i = 0 + 6i \\ -9 = -9 + 0i \\ -i + 9 = 9 - i \\ -3i = 0 - 3i \\ -4i + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 4i \\ 5i = 0 + 5i \\ -4 - i = -4 - i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 3i + 2 = 4 + 3i \\ -5i + 3 - 1 = 2 - 5i \\ 2 - 1 - i = 1 - i \\ -5i + 2 = 2 - 5i \\ -3i + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 3i \\ -2i + 3i = 0 + i \end{cases}$$

$$z = a + bi = (a, b)$$

$$z = a - bi = (a, -b)$$

اعداد مختلط ذیل را به شکل جوهره‌های مرتب بنویسید.

$$1) \quad 1 + 2i = (1, 2)$$

$$2) \quad 5 + i = (5, 1)$$

$$3) \quad 3 + 4i = (3, 4)$$

$$4) \quad -9 + 7i = (-9, 7)$$

$$5) \quad 3 - 5i = (3, -5)$$

$$6) \quad -3 + 4i = (-3, 4)$$

$$7) \quad 13 - 12i = (13, -12)$$

$$8) \quad \sqrt{3} + 3i = (\sqrt{3}, 3)$$

$$9) \quad \sqrt{7} - \sqrt{2}i = (\sqrt{7}, -\sqrt{2})$$

$$10) \quad -3i = 0 - 3i = (0, -3)$$

$$11) \quad 5 + 3i = (5, 3)$$

$$12) \quad 7 - i = (7, -1)$$

$$13) \quad \sqrt{5} - \sqrt{7}i = (\sqrt{5}, -\sqrt{7})$$

$$14) \quad 12 - 7i = (12, -7)$$

$$15) \quad 2 - 3i = (2, -3)$$

$$16) \quad 3 - 4i = (3, -4)$$

$$17) \quad -2 + 6i = (-2, 6)$$

عملیه‌های چهارگانه در اعداد موهومی:

$$1) \quad 7i + 8i = (7 + 8)i = 15i$$

$$2) \quad \sqrt{7}i + 5i = (\sqrt{7} + 5)i$$

$$3) \quad (\sqrt{-1})b + (\sqrt{-1})c = \sqrt{-1}(b + c) = (b + c)i$$

$$4) \quad \sqrt{-7} + \sqrt{-4} = (\sqrt{-1})\sqrt{7} + (\sqrt{-1})(\sqrt{4}) = (\sqrt{-1})(\sqrt{7} + \sqrt{4}) = (\sqrt{7} + 2)i$$

$$5) \quad \sqrt{7}i + \sqrt{7}i = (\sqrt{7} + \sqrt{7})i = (2\sqrt{7})i$$

$$6) \quad z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di \Rightarrow z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$7) \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = 2 - 3i \\ z_2 = 3 + 4i \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = 5 + i$$

$$8) \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = 3 - 4i \\ z_2 = -2 + 6i \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = 1 + 2i$$

$$9) \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = -9 + 7i \\ z_2 = 3 - 15i \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = -6 - 8i$$

$$10) \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = -4 + 3i \\ z_2 = 6 - 7i \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = 2 - 4i$$

$$11) \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = 2 + 5i \\ z_2 = 3 + 4i \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = 5 + 9i$$

$$12) \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = 13 - 12i \\ z_2 = 13 + 12i \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = 26 + 0i$$

$$13) \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = -3 + 6i \\ z_2 = 10 - 7i \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = 7 - i$$

$$14) \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = 3,7 + 6,1 \cdot i \\ z_2 = 5,9i + 1,1 \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = 4,8 + 12i$$

$$15) (2 + 3i) + (-5 + 2i) = -3 + 5i$$

$$16) (2 + 3i) + (-5 - i) = -3 + 2i$$

$$17) (6 - 5i) + (3 + 2i) = 9 - 3i$$

$$18) \left(-6 - \frac{5}{8}i\right) + \left(4 + \frac{1}{2}i\right) = -2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right)i = -2 + \left(\frac{4-5}{8}\right)i = -2 - \frac{1}{8}i$$

$$19) \left(-4 - \frac{6}{5}i\right) + \left(13 + \frac{3}{8}i\right) = 9 + \left(\frac{3}{8} - \frac{6}{5}\right)i = 9 + \left(\frac{15-48}{40}\right)i = 9 - \frac{33}{40}i$$

$$\begin{aligned} 20) & (-7 - \sqrt{-72}) + (8 + \sqrt{-50}) \\ & = (-7 - \sqrt{36(-2)}) + (8 + \sqrt{25(-2)}) = (-7 - 6\sqrt{-2}) + (8 + 5\sqrt{-2}) \\ & = 1 - \sqrt{-2} = 1 - (\sqrt{-1})(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}i \end{aligned}$$

تفریق اعداد موهومی:

$$1) 7i - 4i = (7 - 4)i = 3i$$

$$2) 9i - 13i = (9 - 13)i = -4i$$

$$3) \sqrt{5}i - \sqrt{5}i = 0i = 0$$

$$4) 12i - 7i = 5i$$

$$5) 5i - 2i = 3i$$

$$6) z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di \Rightarrow z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$7) (-4 + 3i) - (6 - 7i) = -10 + 10i$$

$$8) (12 - 5i) - (8 - 3i) = (12 - 8) + (-5 + 3)i = 4 - 2i$$

$$9) (5 - i) - (7 + 3i) = (5 - 7) + (-i - 3i) = -2 - 4i$$

$$10) (2\sqrt{3} + 5\sqrt{7}i) - (\sqrt{3} + 3\sqrt{7}i) = (2\sqrt{3} - \sqrt{3}) + (5\sqrt{7} - 3\sqrt{7})i = \sqrt{3} + 2\sqrt{7}i$$

$$11) (3c + 4di) - (3c + 8di) = (3c - 3c) + (4d - 8d)i = 0 - 4di = -4di$$

$$12) \left(8 + \frac{3}{4}i\right) - \left(-7 + \frac{2}{3}i\right) = (8 + 7) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)i = 15 + \frac{1}{12}i$$

$$13) \left(3 + \frac{3}{5}i\right) - \left(-11 + \frac{7}{15}i\right) = (3 + 11) + \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{15}\right)i = 14 + \left(\frac{9-7}{15}\right)i = 14 + \frac{2}{15}i$$

$$\begin{aligned} 14) & (\sqrt{3} + \sqrt{-2}) - (\sqrt{12} + \sqrt{-8}) \\ & = (\sqrt{3} - \sqrt{12}) + (\sqrt{-2} - \sqrt{-8}) = (\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) + (\sqrt{-1} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{-1} \cdot \sqrt{8})) \\ & = -\sqrt{3} + (\sqrt{2} - 2\sqrt{2})\sqrt{-1} = -\sqrt{3} - \sqrt{2}i \end{aligned}$$

- 15) $(4 + 3i) - (3 + 4i) = (4 - 3) + (3 - 4)i = 1 - i$
- 16) $(4 + 4i) - (4 + 3i) = (4 - 4) + (4 - 3)i = 0 + i = i$
- 17) $(3 - 2i) - (3 + 2i) = (3 - 3) + (-2 - 2)i = 0 - 4i = -4i$
- 18) $(1 + i) - (1 - i) = (1 - 1) + (1 + 1)i = 0 + 2i = 2i$
- 19) $(2a + bi) - (2a - bi) = (2a - 2a) + (b + b)i = 0 + 2bi = 2bi$
- 20) $4(2 + 5i) - (3 - 4i) = (8 + 20i) - (3 - 4i) = (8 - 3) + (20 + 4)i = 5 + 24i$

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i$$

معکوس جمعی:

معکوس‌های جمعی اعداد مختلط ذیل را دریابید.

- 1) $(2 - 3i) + (-2 + 3i) = 0 + 0i$
- 2) $8 + 11i \Rightarrow -8 - 11i$
- 3) $-1 + i \Rightarrow +1 - i$
- 4) $-13 + 13i \Rightarrow +13 - 13i$
- 5) $1 - i \Rightarrow -1 + i$
- 6) $5 - 8i \Rightarrow -5 + 8i$
- 7) $-5i \Rightarrow +5i$
- 8) $2i \Rightarrow -2i$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

ضرب اعداد مختلط:

- 1) $(5 - 4i)(7 - 2i) = 5 \cdot 7 + 5(-2i) + (-4i) \cdot 7 + (-4i)(-2i) = 27 - 38i$
- 2) $(3 + 5i)(1 + 0i) = 3 + 5i$
- 3) $(2 + i)(3 - 2i) = (6 + 2) + (-4i + 3i) = 8 - i$
- 4) $(3 + i)(3 - i) = (9 + 1) + (-3i + 3i) = 10$
- 5) $(2 - 5i)(2 + 5i) = (4 + 25) + (10i - 10i) = 29$
- 6) $(-2 + 3i)(4 - 2i) = (-8 + 6) + (4i + 12i) = -2 + 16i$
- 7) $(\sqrt{6} + i)(6 - i) = (6\sqrt{6} + 1) + (-\sqrt{6}i + 6i) = (6\sqrt{6} + 1) + (6 - \sqrt{6})i$
- 8) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)(\sqrt{3} - \sqrt{2}i) = (3 + 2) + (-\sqrt{6}i + \sqrt{6}i) = 5$
- 9) $(2 - 3i)(2 + 3i) = (4 + 9) + (6i - 6i) = 13$

$$10) \quad (4-3i)(2+i) = (8+3) + (4i-6i) = 11-2i$$

مزدوج یک عدد مختلط:

$$z = x + yi \rightarrow \bar{z} = x - yi$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

$$\left. \begin{array}{l} z = 3 + 4i \\ \bar{z} = 3 - 4i \end{array} \right\} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 9 + 16 = 25, \quad z + \bar{z} = 6, \quad z - \bar{z} = 8i$$

برای دریافت مزدوج یک عدد مختلط تنها قسمت موهومی آن علامه‌اش را تغییر می‌دهیم.

عدد	مزدوج عدد
i	$-i$
$1+i$	$1-i$
$-4-2i$	$-4+2i$
$-5i-6$	$5i-6$

$$a + bi \rightarrow \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \right) \quad \text{معکوس ضربی یک عدد مختلط:}$$

معکوس ضربی اعداد مختلط ذیل را دریافت کنید.

$$1) \quad 5 + 3i \rightarrow \frac{5}{34} - \frac{3}{34}i$$

$$2) \quad \sqrt{2} - 4i \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{18} + \frac{4}{18}i$$

$$3) \quad 2 + 4i \rightarrow \frac{2}{20} - \frac{4}{20}i = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$$

$$4) \quad 5 - 3i \rightarrow \frac{5}{34} + \frac{3}{34}i$$

$$5) \quad 3a - 4bi \rightarrow \frac{3a}{9a^2 + 16b^2} + \frac{4b}{9a^2 + 16b^2}i$$

$$6) \quad (7, 4) = 7 + 4i \rightarrow \frac{7}{65} - \frac{4}{65}i$$

$$7) \quad \sqrt{2} + i \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}i$$

$$8) \quad 3 - i \rightarrow \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$9) \quad -6 + 2i \rightarrow \frac{-6}{40} - \frac{-2}{40}i = -\frac{3}{20} - \frac{1}{20}i$$

$$10) \quad -7 + 3i \rightarrow \frac{-7}{58} - \frac{3}{58}i$$

$$11) \quad 2 + 5i \rightarrow \frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$$

$$12) \quad 2a - bi \rightarrow \frac{2a}{4a^2 + b^2} + \frac{bi}{4a^2 + b^2}$$

$$13) \quad 3x - \frac{1}{2}yi = \frac{3x}{9x^2 + \frac{y^2}{4}} + \frac{\frac{1}{2}yi}{9x^2 + \frac{y^2}{4}}$$

تقسیم دو عدد مختلط:

$$1) \quad \frac{4+3i}{2+5i} = \frac{4+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{8+15-14i}{4+25} = \frac{23-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i$$

$$2) \quad \frac{2-3i}{1+i} = \frac{2-3i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2-3-2i-3i}{1+1} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$3) \quad \frac{3+2i}{5-i} = \frac{3+2i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{15-2+3i+15i}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{13}{26} + \frac{13}{26}i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$4) \quad \frac{7-i}{3-5i} = \frac{7-i}{3-5i} \cdot \frac{3+5i}{3+5i} = \frac{21+5-3i+35i}{9+25} = \frac{26+32i}{34} = \frac{26}{34} + \frac{32}{34}i$$

$$5) \quad \frac{5-2i}{6-i} = \frac{32+5i-12i}{36+1} = \frac{32}{37} - \frac{7i}{37}$$

$$6) \quad \frac{3+4i}{4i} = \frac{3+4i}{4i} \cdot \frac{-4i}{-4i} = \frac{-12i-16i^2}{-16i^2} = \frac{-12i-16(-1)}{-16(-1)} = \frac{16}{16} - \frac{12}{16}i = 1 - \frac{3}{4}i$$

$$7) \quad \frac{6}{1+3i} = \frac{6}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{6-18i}{1+9} = \frac{6}{10} - \frac{18}{10}i = \frac{3}{5} - \frac{9}{5}i$$

$$8) \quad \frac{-4+8i}{2-4i} = \frac{-4+8i}{2-4i} \cdot \frac{2+4i}{2+4i} = \frac{-8-32-16i+16i}{4+16} = \frac{-40}{20} = -2$$

معادله‌های درجه دوم در ساحه اعداد مختلط:

$$1) \quad x^2 - 10x + 26 = 0 \quad \Delta' = \sqrt{25 - 26} = \sqrt{-1} = i$$

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = +5 + i, \quad x_2 = 5 - i$$

$$2) \quad 4x^2 + 4ix + 15 = 0 \quad \mp \sqrt{\Delta} = \sqrt{(4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15} = \sqrt{-256} = \sqrt{256(-1)} = \mp 16i$$

$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{2 \cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

$$3) \quad x^2 + 3ix - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -9 + 8 = -1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-1} = i$$

$$x_1 = \frac{-3i + i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i, \quad x_2 = \frac{-3i - i}{2} = -2i$$

$$4) \quad x^2 - 4x + 13 = 0 \quad \Delta = 4 - 13 = -9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{-1} = 3i$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{2 + 3i}{1} = 2 + 3i$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{2 - 3i}{1} = 2 - 3i$$

سوالات اعداد مختلط

1. حاصل افاده $A = \sqrt{-4} + \sqrt{-9} + \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8}$ را بدست آورید؟

- (A) -2 (B) -4 (C) -8 (D) $5i + 4$

2. مقدار افاده $(1+i)^{28}$ را بدست آورید؟

- (A) $2^{13}i$ (B) 2^{14} (C) -2^{14} (D) $2^{14}i$

3. حاصل افاده $i^{101} + i^{202} + i^{303} + i^{404}$ را بیابید؟

- (A) -1 (B) 0 (C) $-i$ (D) i

4. مقدار $\text{Re}(z)$ را در صورتیکه $z = \frac{2-i}{3+i}$ باشد بیابید؟

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$

5. مقدار z را از افاده $2z + 1 = zi + 9 - 7i$ بدست آورید؟

- (A) $4 - i$ (B) $3 + 4i$ (C) $\frac{23 - 6i}{5}$ (D) $5 + 2i$

6. حاصل افاده $\frac{4}{\sqrt{3}-i} + \frac{2}{i}$ چیست؟

- (A) $\sqrt{3} + i$ (B) $\sqrt{3} - i$ (C) $2\sqrt{3} - i$ (D) $\sqrt{3} + 2i$

7. حاصل $\frac{(i^{11} - 3i^{13})^2}{16i^3}$ کدام گزینه است؟

- (A) $\frac{1}{2}i - \frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{2}i + \frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}i - \frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{i}$

8. مقدار $\text{Re}(z)$ را از افاده $z + \frac{1-i}{3+2i} = 4+i$ بیابید؟

- (A) $\frac{41}{13}$ (B) $\frac{47}{13}$ (C) $\frac{51}{13}$ (D) $\frac{53}{13}$

9. مقدار $\text{Im}(z^2)$ را از افاده $z = \frac{1}{2-3i}$ بیابید؟

- (A) $\frac{12}{169}$ (B) $\frac{3}{13}$ (C) $\frac{5}{169}$ (D) $5 - \frac{5}{169}$

10. از افاده $z = \frac{2+i}{1-i} + \frac{4-i}{2+i}$ مقدار $\text{Re}(z)$ را بیابید؟

- (A) $\frac{17}{10}$ (B) $\frac{19}{10}$ (C) $\frac{21}{10}$ (D) $\frac{23}{10}$

11. جذور معادله $x^2 - 2x + 10 = 0$ را بدست آورید؟

- (A) $\pm 2i$ (B) $1 \pm 3i$ (C) $2 \pm 3i$ (D) $\pm 5i$

12. مقدار z را از افاده $(z-i)(1+i) = 4+6i$ بدست آورید؟

$2-i$ (D)

$2+4i$ (C)

$5+2i$ (B)

$4+i$ (A)

سوالات متریکس و دیترمینانت کانکور 93

1- اگر $A = (a_{ij})_{2 \times 3} = (i)_{2 \times 3}$ باشد پس متریکس A مساوی است به:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2- هرگاه تعداد سطر ها و ستونهای متریکس A مساوی باشد به کدام یکی از نام های ذیل یاد می شود؟

(1) سطری (2) ستونی (3) صفری (4) مربعی

3- معادله دو خط مستقیم به ترتیب $x-6y+4=0$ و $-4x+10y+4=0$ است این دو خط مستقیم با هم دارای حالت زیر می باشد:

(1) متقاطع است (2) موازی است (3) منطبق است (4) هیچکدام

4- اگر عرض یک مستطیل $(n-3)$ و طول آن $(n+2)$ باشد پس مساحت آن مساوی است به:

$$n^2+n-6 \quad (1) \quad n^2-n+6 \quad (2) \quad n^2+n+6 \quad (3) \quad n^2-n-6 \quad (4)$$

5- اگر مرتبه متریکس A , 3×3 باشد پس A چه نوع متریکس است؟

(1) سطری (2) ستونی (3) مربعی (4) تمام آن درست است

6- قیمت دیترمینانت $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ مساوی است به:

$$8 \quad (1) \quad 3605 \quad (2) \quad -5 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

7- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ کدام نوع متریکس است؟

(1) صفری (2) مربعی (3) قطری (4) 2 و 1 درست است

8. اگر در یک مثلث طول قاعده آن $(3b-4)$ و ارتفاع آن $(b+2)$ باشد پس مساحت آن مساوی است به :

$$\frac{3}{2}b^2 - b + 4 \quad (1) \quad b^2 + b + 4 \quad (2) \quad \frac{3}{2}b^2 + b - 4 \quad (3) \quad \frac{1}{2}b^2 + b - 4 \quad (4)$$

9- اگر $a+b=9$ و $ab=20$ باشد درینصورت $a-b$ مساوی است به :

$$\pm 3 \quad (1) \quad \pm 4 \quad (2) \quad \pm 1 \quad (3) \quad \pm 5 \quad (4)$$

10- اگر $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ باشد پس مرتبه متریکس مذکور مساوی است به :

$$2 \times 2 \quad (1) \quad 3 \times 1 \quad (2) \quad 1 \times 3 \quad (3) \quad 3 \times 3 \quad (4)$$

11- کدام یک از متریکس های ذیل یک متریکس مربعی نیست :

$$(1) \quad A = (a_{ij})_{2 \times 3} \quad (2) \quad A = (a_{ij})_{2 \times 2} \quad (3) \quad A = (a_{ij})_{4 \times 4} \quad (4) \quad \text{هیچکدام}$$

12- اگر $a+b=7$ ، $a-b=1$ باشد، در این صورت a^2+b^2 مساوی است به :

$$(1) \quad 20 \quad (2) \quad 24 \quad (3) \quad 23 \quad (4) \quad 25$$

13- قیمت دیترمینانت $\begin{vmatrix} \log_3 4 & -3 \\ 5 & \log_4 9 \end{vmatrix}$ عبارت است از:

$$(1) \quad 17 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 15 \quad (4) \quad 13$$

14- متریكس مربعی که تمام عناصر آن صفرها باشد چه نوع متریكس است؟

$$(1) \quad \text{سطری} \quad (2) \quad \text{ستونی} \quad (3) \quad \text{غیرصفری} \quad (4) \quad \text{صفری}$$

15- مستقیم های $2x-3y=1$ و $3y-2x+3=0$ با هم چه رابطه دارند؟

$$(1) \quad \text{منطبق اند} \quad (2) \quad \text{عمود اند} \quad (3) \quad \text{موازی اند} \quad (4) \quad \text{یک نقطه مشترک دارند}$$

16- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس ستونی است:

$$(1) \quad A = (a_{ij})_{3 \times 2} \quad (2) \quad A = (a_{ij})_{4 \times 4} \quad (3) \quad A = (a_{ij})_{1 \times 3} \quad (4) \quad A = (a_{ij})_{3 \times 1}$$

17. اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ باشد پس $A+B$ مساوی است به :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

18. کدام یک از متریكس های ذیل یک متریكس قطری است :

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

19. قیمت دیترمینانت $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ عبارت است از :

$$(1) \quad 10 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 30 \quad (4) \quad 4$$

20. هرگاه $x-y=5$ و $xy=10$ باشد پس x^3-y^3 مساوی است به :

$$(1) \quad 275 \quad (2) \quad 260 \quad (3) \quad 265 \quad (4) \quad 270$$

21. $\frac{(x+y)^2}{2x^2y-2xy^2} : \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$ مساوی است به :

$$(1) \quad -\frac{1}{2xy} \quad (2) \quad \frac{x+y}{2xy} \quad (3) \quad \frac{4}{xy} \quad (4) \quad -\frac{4}{xy}$$

22- اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ باشد، پس مرتبه متریكس A مساوی است به:

$$(1) \quad 2 \times 3 \quad (2) \quad 3 \times 3 \quad (3) \quad 3 \times 2 \quad (4) \quad 2 \times 2$$

23. $B = (b_{ij})_{1 \times 5}$ چه نوع متریكس است :

(1) ستونی (2) صفری (3) سطری (4) مربعی

24- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس مربعی است:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ - & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

25- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس ستونی می باشد؟

$$(1) A = (a_{ij})_{3 \times 2} \quad (2) A = (a_{ij})_{4 \times 4} \quad (3) A = (a_{ij})_{1 \times 3} \quad (4) A = (a_{ij})_{3 \times 1}$$

26- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس قطری نیست؟

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

27- کدام یک از متریكس های ذیل یک متریكس سطری است:

$$(1) A = (a_{ij})_{3 \times 2} \quad (2) A = (a_{ij})_{1 \times 3} \quad (3) A = (a_{ij})_{3 \times 3} \quad (4) A = (a_{ij})_{4 \times 2}$$

28- اگر $A = (a_{ij})_{3 \times 3} = (2i + 3j)_{3 \times 3}$ باشد پس متریكس A عبارت است از:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 5 & 8 & 11 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 13 \\ 8 & 5 & 11 \\ 12 & 9 & 15 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 5 & 8 & 11 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

29- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس ستونی می باشد:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (3) A = (2 \ 4 \ 7) \quad (4) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

30- اگر $A = (a_{ij})_{2 \times 2} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 2}$ باشد پس متریكس A مساوی است به:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

31- افاده الجبری $A = x^2 + xy + y^3 + 5y^2$ چند متحول دارد؟

$$(1) 1 \quad (2) 3 \quad (3) 2 \quad (4) 5$$

32- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس مربعی نمی باشد؟

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

33- اگر $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ باشد پس $A+B$ مساوی است به :

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

34- اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ باشد پس $A+B$ مساوی است به:

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} (3) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} (4) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

35- متریكس B دارای 3 سطر و 5 ستون می باشد پس مرتبه این متریكس عبارت است از:

$$(1) 5 \times 3 (2) 15 (3) 8 (4) 3 \times 5$$

36- باقیمانده عملیه $(x-3): (8x^3 - 5x^2 + 12x - 8)$ مساوی است به:

$$(1) 370 (2) 372 (3) 199 (4) 470$$

37- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس مربعی نمی باشد:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (3) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} (4) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

38- کدام یک از متریكس های ذیل یک متریكس 1×3 است:

$$(1) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} (2) A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} (3) A = (2 \ 4 \ 5) (4) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

39- قیمت دترمینانت $\begin{vmatrix} 2\sin x & 2\cos x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$ عبارت است از:

$$(1) 0 (2) 1 (3) 2\sin^2 x - 2\cos^2 x (4) \sin 2x$$

40- $A = (1 \ 0 \ 2 \ 3)_{1 \times 4}$ چه نوع متریكس است:

$$(1) \text{ستونی} (2) \text{سطری} (3) \text{مربعی} (4) \text{صفری}$$

41- اگر $B = (b_{ij})_{2 \times 2} = \left(-\frac{i}{j}\right)_{2 \times 2}$ باشد پس متریكس B مساوی است به:

$$(1) B = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} (2) B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (3) B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} (4) B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

42- اگر $B = (b_{ij}) = (i-j)_{2 \times 2}$ باشد پس متریكس B مساوی است به:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (3) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (4) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

43- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس مربعی است:

$$(1) A = (1 \ 2 \ 3) (2) A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} (3) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} (4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ - & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

44- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس صفری است:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

45- کدام یکی از متریكس های ذیل یک متریكس سطری نیست:

$$A = (a_{ij})_{1 \times 2} \quad (4) \quad A = (a_{ij})_{1 \times 5} \quad (3) \quad A = (a_{ij})_{1 \times 4} \quad (2) \quad A = (a_{ij})_{3 \times 1} \quad (1)$$

46- اگر $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ باشد پس $A - B$ مساوی است به :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

47- اگر $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ باشد پس متریكس مذکور مساوی است به:

$$3 \times 3 \quad (4) \quad 1 \times 3 \quad (3) \quad 3 \times 1 \quad (2) \quad 2 \times 2 \quad (1)$$

48- اگر مرتبه متریكس A 3×3 باشد پس A چه نوع متریكس است :

(1) سطری (2) ستونی (3) مربعی (4) تمام آن ها درست است
